



**TUGAS AKHIR - SM141501**

**ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA SISTEM KEUANGAN  
DENGAN KONTROL INPUT**

**ANGGITA DWI SAPUTRI  
NRP 06111440000028**

**Dosen Pembimbing  
Dr. Drs. Hariysnto, M.Si  
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika, Komputasi dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2018**





**FINAL PROJECT - SM141501**

**ANALYSIS HOPF BIFURCATION ON THE MODEL FINANCIAL  
SYSTEM WITH CONTROL INPUT**

**ANGGITA DWI SAPUTRI**

**NRP 06111440000028**

**Supervisors**

**Dr. Drs. Hariyanto, M.Si**

**Drs. M. Setijo Winarko, M.Si**

**DEPARTMEN OF MATHEMATICS**

**Faculty of Mathematics, Computation and Data Science**

**INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER**

**Surabaya 2018**

**LEMBAR PENGESAHAN**  
**ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA SISTEM**  
**KEUANGAN DENGAN KONTROL INPUT**

**ANALYSIS HOPF BIFURCATION ON THE MODEL**  
**FINANCIAL SYSTEM WITH CONTROL INPUT**

**TUGAS AKHIR**


Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
Untuk memperoleh gelar Sarjana Sains  
Pada bidang studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika, Komputasi, dan Sains Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya


Oleh :  
**ANGGITA DWI SAPUTRI**  
NRP. 06111440000028

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,

Dosen Pembimbing I,

  
Dr. M. Setijo Winarko, M.Si  
NIP. 10640920 199002 1 002

  
Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
NIP. 19530414 198203 1 002

Mengetahui,

Ketua Departemen Matematika  
**FMKSD ITS**

  
Dr. Inam Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003  
Surabaya, Juni 2018

# ANALISIS BIFURKASI HOPF PADA SISTEM KEUANGAN DENGAN KONTROL INPUT

Nama Mahasiswa : Anggita Dwi Saputri  
NRP : 06111440000028  
Departemen : Matematika FMKSD-ITS  
Dosen Pembimbing : 1. Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
2. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

## **Abstrak**

*Sistem Keuangan mempunyai peran penting dalam ekonomi dimana stabilitas sistem keuangan mempengaruhi stabilitas ekonomi. Ketidakstabilan sistem keuangan dapat mengakibatkan timbulnya masalah yang sangat berdampak pada kegiatan ekonomi, seperti krisis keuangan. Penelitian ini menganalisa perilaku dinamis model matematika sistem keuangan. Oleh karena itu, diperlukan adanya kajian terhadap dinamika sistem keuangan dengan menggunakan model matematika untuk mengetahui sistem keuangan yang berkaitan dengan kestabilan sistem. Analisis dinamika model matematika sistem keuangan pada penelitian ini meliputi mencari titik tetap, menentukan kestabilan titik tetap menggunakan kriteria Routh-Hurwitz, dan analisis bifurkasi Hopf. Bifurkasi Hopf terjadi pada titik tetap  $E_0$ . Eksistensi bifurkasi Hopf bergantung pada biaya per investasi di pasar komersial sebagai parameter bifurkasi. Hasil analisis menunjukkan adanya bifurkasi Hopf yang mengelilingi titik tetap positif. Untuk mendukung hasil analisis dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan Runge-Kutta orde empat.*

**Kata Kunci :** *Sistem keuangan, Stabilitas, Bifurkasi Hopf, Metode Runge-Kutta.*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

# ANALYSIS HOPF BIFURCATION ON THE MODEL FINANCIAL SYSTEM WITH CONTROL INPUT

Name : Anggita Dwi Saputri  
NRP : 06111440000028  
Departement : Mathematics FMKSD-ITS  
Supervisors : 1. Dr. Drs. Hariyanto, M.Si  
2. Drs. M. Setijo Winarko, M.Si

## ***Abstract***

*The financial system has an important role in the economy where the stability of the financial system affect economic stability. The instability of the financial system can lead to the very problem have an impact on economic activities, such as the financial crisis. Therefor, it is necessary to study the dynamics of financial system using mathematical models regard to system stability. This research analyzes the behavior of dynamic mathematical model of the financial system. Dynamics analysis of the mathematical model of the financial system include seeking a fixed point, to determine the stability of a fixed point using the Routh-Hurwitz criterion, the Hopf bifurcation and analysis. Hopf bifurcation occurs at the fixed oint  $E_0$ . The result of the analysis shows that there is a Hopf bifurcation that surrounds the positive fixed point. The existence of Hopf bifurcation depending on the cost of investing in the commercial markets as the bifurcation parameter. To support the results of the analysis of the numeric simulation by using fourth order of Runge-Kutta numerical method.*

***Keywords :*** Financial system models, Stability, Hopf Bifurcation, Runge-Kutta Method.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan atas kehadiran Tuhan Yang Maha Esa, karena hanya dengan karunia rahmat, bimbingan, serta anugrah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul Analisis Bifurkasi Hopf Pada Sistem Keuangan Dengan Kontrol Input. Dalam proses pembuatan Tugas Akhir ini, penulis mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dr. Imam Mukhlash, S.Si., M.T selaku Kepala Departemen Matematika ITS.
2. Dr. Dra. Mardlijah, MT selaku Sekretaris Departemen Matematika ITS.
3. Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si selaku Kaprodi S1 Departemen Matematika ITS.
4. Drs. Iis Herisman, M.Sc Sekprodi S1 Departemen matematika ITS.
5. Dr. Drs. Hariyanto M.Si dan Drs. M. Setijo Winarko, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang telah memberikan bimbingan, arahan, dan motivasi kepada penulis dalam mengerjakan Tugas Akhir ini sehingga dapat selesai dengan baik.
6. Dra. Nur Asiyah, M.Si. Drs. Lukman Hanafi, M.Sc dan Dian Winda Setyawati, S.Si, M.Si selaku Dosen Penguji yang telah menguji Sidang Tugas Akhir ini.
7. Drs. Sentot Didik Surjanto, M.Si selaku Dosen Wali yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga selesainya Tugas Akhir ini.
8. Seluruh jajaran dosen dan staf departemen Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
9. Bapak Chosirin, Ibu Sak'amah selaku orangtua penulis, serta Nofia Arisanti selaku kakak dan seluruh keluarga. yang selalu memberikan doa da dukungan baik moral maupun materiil

10. Fifi, Ayu riska, Nadia, Nuke, Mida, Dian, Luh ayu, Agents (Hanna, Nanda, Mitha, Rizqa, Dewik, Dila, Gheby) sebagai sahabat yang menyemangati dan membantu penulis.
11. Teuku Reza Maulana Fasya S.T yang selalu menemani, menyemangati dan menghibur penulis.
12. M. Nur Haqqul S.Si, M.Si yang telah membagi ilmunya kepada penulis yang membantu selama penulisan Tugas Akhir ini.
13. Teman-teman Matematika ITS 2014 yang telah memberikan banyak cerita selama kuliah.
14. Banyak pihak yang tidak dapat ditulis satu persatu oleh penulis yang telah membantu selama penulisan Tugas Akhir ini.

Penulis menyadari bahwa selama masa penelitian dan penyusunan Tugas Akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik dari pembaca sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang berkepentingan.

Surabaya, Mei 2018

**Penulis**

## DAFTAR ISI

<i>Abstrak</i> .....	iii
<i>Abstract</i> .....	v
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI .....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR TABEL .....	xii
DAFTAR LAMBANG.....	xiii
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	3
1.5 Manfaat.....	3
1.6 Sistematika Penulisan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	7
2.1 Penelitian Terkait .....	7
2.2 Model Sistem Keuangan .....	8
2.3 Titik Tetap Sistem dan Titik Tetap Hiperbolik .....	13
2.4 Linearisasi Sistem Nonlinear.....	14
2.5 Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem.....	15

2.6 Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Hiperbolik.....	16
2.7 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz .....	17
2.8 Bifurkasi Hopf.....	18
BAB III METODE PENELITIAN .....	23
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN .....	27
4.1 Titik Tetap Sistem .....	27
4.3 Analisis Kestabilan.....	29
4.3.1 Translasi Titik Tetap.....	29
4.3.2 Linearisasi Sistem.....	30
4.3.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz.....	32
4.4 Analisis Bifurkasi Hopf.....	35
4.5 Simulasi Numerik.....	52
BAB V PENUTUP.....	61
5.1 Kesimpulan.....	61
5.2 Saran.....	62
DAFTAR PUSTAKA.....	63

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1 Diagram Alir Penelitian.....	25
Gambar 4. 1 Trayektori orbit periodik $2D(x, y)$ .....	49
Gambar 4. 2 Trayektori orbit periodik $2D(x, z)$ .....	49
Gambar 4. 3 Trayektori orbit periodik $2D(x, u)$ .....	50
Gambar 4. 4 Trayektori orbit periodik $2D(y, z)$ .....	50
Gambar 4. 5 Trayektori orbit periodik $2D(y, u)$ .....	51
Gambar 4. 6 Trayektori orbit periodik $2D(z, u)$ .....	51
Gambar 4. 7 Grafik kestabilan $(x, y, z, u)$ terhadap fungsi $t(\text{waktu})$ pada $b = 0.7068$ .....	52
Gambar 4. 8 Grafik Kestabilan $(x, y, z, u)$ terhadap fungsi $t(\text{waktu})$ pada saat $b = 0.4$ .....	56
Gambar 4. 9 Grafik Kestabilan $(x, y, z, u)$ terhadap fungsi $t(\text{waktu})$ pada saat $b = 0.9$ .....	57

## **DAFTAR TABEL**

Tabel 2. 1 Kriteria Kestabilan Titik Tetap.....	17
---	----

## DAFTAR LAMBANG

$x$	: suku bunga pada saat $t$
$y$	: tingkat permintaan investasi pada saat $t$
$z$	: indeks harga instrumen keuangan pada saat $t$
$u$	: kontrol input pada saat $t$
$a$	: total tabungan di bank
$b$	: biaya per investasi
$c$	: elastisitas permintaan di pasar uang
$d$	: amplitudo yang sesuai
$k$	: amplitudo yang sesuai
$m$	: amplitudo yang sesuai
$E$	: titik tetap
$\lambda$	: nilai karakteristik

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

Pada bab ini, dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan dari Tugas Akhir ini.

#### **1.1 Latar Belakang**

Sistem keuangan merupakan satu kesatuan jaringan yang menggambarkan interaksi lembaga-lembaga keuangan dan pasar. Interaksi yang terjadi dalam sistem keuangan sangat kompleks, berkaitan dengan mobilitas dana, baik dalam kegiatan investasi, penyediaan keuangan, maupun pembiayaan kegiatan komersial. Lembaga keuangan berperan penting terutama sebagai penengah antara lembaga-lembaga yang menyediakan dana dan lembaga-lembaga yang membutuhkan dana, sedangkan pasar berperan penting dalam memfasilitasi pengelolaan dana dan transformasi risiko [1].

Kestabilan sistem keuangan berdampak besar terhadap jalannya kegiatan ekonomi. Sistem keuangan dikatakan stabil ketika mekanisme ekonomi dalam penetapan harga instrumen keuangan, alokasi dana, dan pengelolaan dana berfungsi secara baik dan mendukung kegiatan ekonomi. Mekanisme ekonomi dalam penetapan harga instrumen keuangan, alokasi dana, dan pengelolaan dana tersebut sangat berkaitan dengan fenomena-fenomena perubahan suku bunga, perubahan tingkat permintaan investasi, dan perubahan indeks harga instrumen keuangan. Ketiga fenomena tersebut saling berhubungan satu sama lain dan tidak terlepas dari pengaruh total tabungan nasional, biaya investasi, dan elastisitas permintaan. Jika terdapat ketidaksesuaian antara faktor-faktor yang saling berpengaruh tersebut di dalam sistem keuangan, maka permasalahan yang

ditimbulkan sangat kompleks dan dapat berujung pada krisis keuangan[1].

Metode pengendalian yang efektif dan cepat sangat penting bagi pemerintah ketika beberapa kasus yang rumit muncul. Model sistem keuangan tiga dimensi yang menggambarkan variasi waktu penyesuaian negara telah dipublikasikan antara lain mencakup tingkat suku bunga, indeks harga, dan permintaan investasi. Kemudian, sistem keuangan tiga dimensi yang rumit serta risiko dari analisis sistem dinamis yang dibangun untuk mengatur pasar keuangan telah terbukti dapat dikendalikan secara efektif [3,4]. Demikian pula pada [5] dengan menggunakan metode *delayed feedback control* (DFC) dan membuktikan bahwa sistem keuangan yang rumit dapat distabilkan pada berbagai orbit periodik.

Pada Tugas akhir ini, penulis menganalisis kestabilan dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz dan Bifurkasi Hopf pada model matematika sistem keuangan dengan empat variable. Serta memberikan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta yang disajikan dalam bentuk simulasi sehingga hasil simulasi merepresentasikan hasil analisis dari model tersebut.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Permasalahan dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Bagaimana mengkaji model matematika sistem keuangan diperkenalkan dengan penambahan *feedback controllers*, analisis kestabilan, dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan.
2. Bagaimana interpretasi hasil analisis dari model sistem keuangan dan penyelesaian numerik dari model tersebut dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta beserta simulasinya.

## **1.3 Batasan Masalah**

Permasalahan yang dibahas dalam Tugas Akhir ini dibatasi ruang lingkupnya, yaitu :

1. Model yang dianalisis adalah model sistem keuangan dengan empat variabel, yaitu tingkat suku bunga, permintaan investasi, dan indeks harga instrumen keuangan serta *control input* di dalam perekonomian makro.
2. Tingkat suku bunga yang didefinisikan sebagai harga atau biaya uang untuk pinjaman dan kembali ke pinjaman.
3. Permintaan investasi yang akan terpengaruh langsung oleh tingkat suku bunga.
4. Parameter yang mempengaruhi pada model matematika sistem keuangan dibatasi hanya pada tiga hal, yaitu total tabungan di bank, biaya per investasi, elastisitas permintaan dan amplitudo yang sesuai.

#### **1.4 Tujuan**

Tujuan dari Tugas Akhir ini adalah :

1. Mendapatkan kestabilan dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model matematika sistem keuangan.
2. Menginterpretasikan hasil analisis model matematika sistem keuangan dan mendapatkan penyelesaian numerik dari model tersebut dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta beserta simulasinya.

#### **1.5 Manfaat**

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Memberikan kontribusi dinamika sistem keuangan terkait dengan perilaku sistem dan perubahannya.
2. Memperluas kajian tentang model sistem keuangan, kestabilan, dan bifurkasi yang terjadi pada sistem.
3. Sebagai bahan pertimbangan untuk penelitian lanjutan yang berkaitan dengan metode pengendalian atau kontrol sistem keuangan.

#### **1.6 Sistematika Penulisan**

Sistematika dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

**BAB I      PENDAHULUAN**

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.

**BAB II      TINJAUAN PUSTAKA**

Bab ini berisi tentang materi-materi yang mendukung Tugas Akhir ini, antara lain penelitian terkait, model matematika sistem keuangan, titik tetap sistem linearisasi sistem nonlinear, akar-akar persamaan karakteristik sistem, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dan bifurkasi Hopf, serta metode numerik Runge-Kutta orde-4.

**BAB III      METODOLOGI PENELITIAN**

Bab ini berisi tentang langkah-langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.

**BAB IV      ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Bab ini berisi tentang pembahasan mengenai representasi sistem keuangan pada model matematika sistem keuangan, titik tetap model matematika sistem keuangan, penentuan kestabilan dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz dan analisis bifurkasi Hopf dari model matematika sistem keuangan dan penyelesaian numerik dari model matematika sistem keuangan yang disimulasikan dengan menggunakan MATLAB2016b.

## BAB V

### PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan selanjutnya.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini, dijelaskan mengenai tinjauan pustaka yang menjadi dasar materi dalam penyusunan Tugas Akhir ini dan menunjang metode-metode yang digunakan dalam pembahasan Tugas Akhir ini.

#### **2.1 Penelitian Terkait**

Penelitian terdahulu tentang analisis bifurkasi pada sistem keuangan adalah penelitian pada tahun 2001 [5] yang berjudul “*Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of nonlinear finance system*”. Pada penelitian tersebut dilakukan analisis model sistem keuangan dengan tiga variabel, yaitu suku bunga, tingkat permintaan investasi, dan indeks harga instrumen keuangan dan dapat ditunjukkan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan. Parameter-parameter yang tidak sesuai menjadi penyebab terjadinya kekacauan pada sistem keuangan.

Penelitian lainnya pada tahun 2009 [4] yang berjudul “*Chaos and Hopf bifurcation of finance system*”. Pada penelitian tersebut digunakan dua model sistem keuangan, yaitu model sistem keuangan yang sama dengan model yang digunakan pada penelitian[5], serta model sistem keuangan dengan *time-delay feedback* dan dapat ditunjukkan eksistensi bifurkasi Hopf pada kedua sistem keuangan tersebut dan menemukan adanya pengaruh yang sangat besar dari tabungan terhadap sistem keuangan.

Penelitian lain yang dilakukan setelah kedua penelitian di atas adalah penelitian yang dilakukan oleh pada tahun 2012[3] yang berjudul “*Hopf-pitchfork bifurcation and periodic phenomena in nonlinear financial system with delay*”. Pada penelitian tersebut, ditemukan eksistensi bifurkasi Hopf-Pitchfork pada sistem keuangan dengan *time-delay feedback*.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka pada Tugas Akhir ini, dilakukan analisis kestabilan dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan dengan empat variabel, yaitu suku bunga, tingkat permintaan investasi, indeks harga instrumen keuangan, dan control input. Selanjutnya, diberikan penyelesaian numerik dengan metode numerik Runge-Kutta yang disajikan dalam bentuk simulasi untuk menggambarkan hasil analisis dari model tersebut. Pustaka terkait model sistem keuangan dan metode-metode yang digunakan untuk analisis dipaparkan pada subbab-subbab berikutnya.

## **2.2 Model Sistem Keuangan**

Sistem keuangan merupakan suatu sistem yang mengatur transfer dana antara pihak yang kelebihan dana dan pihak yang membutuhkan dana agar tercapai alokasi dana yang efisien serta menyediakan fasilitas keuangan dalam pengelolaan dana. Sistem keuangan secara sederhana dapat diartikan sebagai suatu proses intermediasi keuangan.

Dinamika sistem keuangan menggambarkan hubungan antara faktor-faktor yang berpengaruh terhadap jalannya sistem keuangan. Faktor-faktor yang sangat berpengaruh terhadap jalannya sistem keuangan, yaitu :

1. Suku Bunga  
Suku bunga merupakan persentase dari pokok pinjaman yang dibayarkan sebagai imbal jasa (bunga) dalam suatu periode tertentu.
2. Tingkat Permintaan Investasi  
Permintaan investasi merupakan banyaknya permintaan terkait pengeluaran dalam kegiatan produksi atau pada sesuatu yang bertujuan untuk penanaman modal dengan harapan memperoleh keuntungan. Tingkat permintaan investasi merupakan perbandingan antara jumlah permintaan investasi pada waktu tertentu dan jumlah permintaan investasi pada tahun dasar.
3. Indeks Harga Instrumen Keuangan  
Indeks harga merupakan persentase dari harga rata-rata pada waktu tertentu dibandingkan harga rata-rata waktu dasar.



4. Kontrol input  
Kontrol input adalah intervensi pemerintah dalam sistem keuangan untuk perekonomian suatu negara. Dimana pemerintah akan mengeluarkan kebijakan untuk mengatasi permasalahan dalam sebuah perekonomian di negara tersebut.
5. Tabungan  
Tabungan merupakan simpanan yang dibuat dengan menekan kegiatan konsumsi untuk mendapatkan konsumsi yang lebih baik di masa mendatang.
6. Biaya Per-Investasi  
Biaya per-investasi merupakan biaya yang harus dikeluarkan untuk setiap unit investasi.
7. Elastisitas Permintaan  
Elastisitas permintaan merupakan ukuran kepekaan perubahan jumlah permintaan terhadap perubahan harga (perbandingan antara persentase jumlah permintaan dan persentase perubahan harga).
8. Tingkat Keuntungan Investasi  
Tingkat keuntungan investasi merupakan perbandingan antara keuntungan investasi pada waktu tertentu dan keuntungan investasi pada waktu dasar.
9. Amplitudo  
Besarnya perubahan dari variabel osilasi dengan osilasi lainnya dalam sebuah sistem yang berosilasi.

Faktor-faktor di atas saling mempengaruhi satu sama lain dan menyebabkan terjadinya fenomena-fenomena pada sistem keuangan yang dapat digambarkan dalam model matematika. Fenomena-fenomena tersebut antara lain :

- a) Laju perubahan suku bunga

Laju perubahan suku bunga dalam sistem keuangan dipengaruhi oleh tinggi rendahnya harga instrumen keuangan serta surplus antara suku bunga yang dibayarkan untuk investasi dan suku bunga yang diperoleh dari tabungan secara keseluruhan.

Jika suku bunga pada waktu tertentu tinggi, maka harga instrumen keuangan akan rendah. Tingginya suku bunga juga menyebabkan pelaku-pelaku ekonomi lebih memilih untuk menabung daripada melakukan investasi, sehingga total bunga yang dibayarkan untuk seluruh investasi dengan uang pinjaman di bank akan rendah dan total bunga tabungan yang diperoleh seluruh penabung di bank akan tinggi. Pada kondisi tersebut, total kegiatan produksi akan berkurang untuk total konsumsi yang sama di dalam masyarakat. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat akan berkurang, sedangkan uang yang ada di bank akan bertambah. Jika kondisi ini terjadi terus-menerus, maka suku bunga akan diturunkan pada kurun waktu selanjutnya supaya konsumsi masyarakat dapat terus terpenuhi.

Jika suku bunga pada waktu tertentu rendah, maka harga instrumen keuangan akan tinggi. Rendahnya suku bunga juga menyebabkan pelaku-pelaku ekonomi lebih memilih untuk melakukan investasi daripada menabung, sehingga total bunga yang dibayarkan untuk seluruh investasi dengan uang pinjaman di bank akan tinggi dan total bunga tabungan yang diperoleh seluruh penabung di bank akan rendah. Pada kondisi tersebut, total kegiatan produksi akan bertambah untuk total konsumsi yang sama di dalam masyarakat. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat akan bertambah, sedangkan uang yang ada di bank akan berkurang. Jika kondisi ini terjadi secara terus-menerus, maka suku bunga akan dinaikkan pada kurun waktu selanjutnya untuk mencegah terjadinya inflasi.

b) Laju perubahan tingkat permintaan investasi

Laju perubahan tingkat permintaan investasi dalam sistem keuangan dipengaruhi oleh tingkat keuntungan investasi, tinggi rendahnya suku bunga dan total biaya investasi.

Jika suku bunga pada waktu tertentu sangat tinggi, maka total biaya investasi akan tinggi dan tingkat keuntungan investasi akan rendah. Jika kondisi ini terjadi, maka permintaan investasi pada kurun waktu selanjutnya akan rendah karena para pelaku

ekonomi lebih memilih untuk menabung dengan suku bunga yang sangat tinggi daripada melakukan investasi.

Jika suku bunga pada waktu tertentu sangat rendah, maka total biaya investasi akan rendah dan tingkat keuntungan investasi akan tinggi. Jika kondisi ini terjadi, maka permintaan investasi pada kurun waktu selanjutnya akan tinggi karena para pelaku ekonomi lebih memilih untuk melakukan investasi dari pada menabung dengan suku bunga yang sangat rendah.

c) Laju perubahan indeks harga instrumen keuangan

Laju perubahan indeks harga instrumen keuangan dipengaruhi oleh tinggi rendahnya jumlah permintaan serta tinggi rendahnya tingkat inflasi. Tinggi rendahnya jumlah permintaan direpresentasikan oleh elastisitas permintaan dan indeks harga instrumen keuangan, sedangkan tinggi rendahnya tingkat inflasi direpresentasikan oleh suku bunga.

Jika suku bunga pada waktu tertentu tinggi, maka harga instrumen keuangan akan rendah dan elastisitas permintaan akan rendah. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat sedikit karena para pelaku ekonomi lebih memilih untuk menabung dengan suku bunga yang tinggi daripada berinvestasi. Jika kondisi ini terjadi terus-menerus, maka harga instrumen keuangan pada kurun waktu selanjutnya akan naik (ditandai dengan naiknya indeks harga) seiring dengan diturunkannya suku bunga.

Jika suku bunga pada waktu tertentu rendah, maka harga instrumen keuangan akan tinggi, dan elastisitas permintaan akan tinggi. Akibatnya, uang yang beredar di masyarakat banyak karena pelaku ekonomi lebih memilih untuk berinvestasi daripada menabung dengan suku bunga rendah.

Jika kondisi ini terjadi terus-menerus, maka harga instrumen keuangan pada kurun waktu selanjutnya akan turun (ditandai dengan turunnya indeks harga) seiring dengan dinaikkannya suku bunga untuk mencegah inflasi. Maka dari itu perlu adanya penambahan kontrol input untuk menyeimbangkan lingkungan ekonomi.

## d) Laju perubahan kontrol input

Laju perubahan kontrol input dipengaruhi oleh interval tertentu yang mana memantau situasi ekonomi dan keuangan. Banyaknya kebijakan dari pemerintah dipengaruhi oleh tinggi rendahnya inflasi. Jika inflasi itu tinggi, namun permintaan investasi menurun, pemerintah akan mengeluarkan kebijakan meningkatkan suku bunga sebagai cara untuk mengurangi inflasi dan juga meningkatkan daya beli konsumen. Dimana kontrol input ini atau kebijakan pemerintah yang berinteraksi dengan tingkat suku bunga, permintaan investasi dan juga indeks harga instrumen keuangan. Untuk mengatasi kegagalan pasar (*market failure*) seperti kekakuan harga, monopoli, dan eksternalitas yang merugikan maka peran pemerintah sangat diperlukan dalam perekonomian suatu negara. Peranan ini dapat dilakukan dalam bentuk intervensi secara langsung maupun tidak langsung. Intervensi pemerintah secara langsung dan tidak langsung dalam penentuan harga pasar untuk melindungi konsumen atau produsen melalui kebijakan penetapan harga minimum (*floor price*) dan kebijakan penetapan harga maksimum (*ceiling price*).

Misalkan

$x$  : suku bunga

$y$  : tingkat permintaan investasi

$z$  : indeks harga instrumen keuangan

$u$  : control input

$a$  : tabungan

$b$  : biaya per investasi

$c$  : elastisitas permintaan

$d$ ,  $k$ , dan  $m$  adalah amplitudo yang sesuai

$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  adalah laju perubahan suku bunga

$\dot{y} = \frac{dy}{dt}$  adalah laju perubahan tingkat permintaan investasi

$\dot{z} = \frac{dz}{dt}$  adalah laju perubahan indeks harga instrumen keuangan,

$\dot{u} = \frac{du}{dt}$  adalah laju perubahan kontrol input

maka fenomena-fenomena di atas dapat direpresentasikan ke dalam model dinamik nonlinear di bawah ini :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z} = -x - cz + u \\ \dot{u} = -dxy - ku - mz \end{cases} \quad (2.1)$$

dengan  $a \geq 0$  adalah total tabungan di bank,  $b \geq 0$  adalah biaya per investasi,  $c \geq 0$  adalah elastisitas permintaan.

Dimana  $u$  dinotasikan *control input* dan intervensi ekonomi untuk menyeimbangkan lingkungan ekonomi [6]. Laju perubahan suku bunga dipengaruhi oleh tinggi rendahnya harga instrumen keuangan serta surplus antara suku bunga yang dibayarkan untuk investasi dan suku bunga yang diperoleh dari tabungan secara keseluruhan dalam perekonomian makro. Laju perubahan tingkat permintaan investasi dipengaruhi oleh tingkat keuntungan investasi serta tinggi rendahnya suku bunga dan total biaya investasi di dalam perekonomian makro. Sedangkan Laju perubahan indeks harga instrumen keuangan dipengaruhi oleh tinggi rendahnya jumlah permintaan serta tinggi rendahnya tingkat inflasi di dalam perekonomian makro. Tinggi rendahnya jumlah permintaan direpresentasikan oleh elastisitas permintaan dan indeks harga instrumen keuangan, sedangkan tinggi rendahnya tingkat inflasi direpresentasikan oleh suku bunga[3].

Dasar teori yang digunakan pada Tugas akhir ini meliputi titik tetap system dan titik tetap hiperbolik, linearisasi sistem nonlinear, akar-akar persamaan karakteristik, kestabilan asimtotis, kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, bifurkasi Hopf.

### 2.3 Titik Tetap Sistem dan Titik Tetap Hiperbolik

Titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu. Pandang medan vektor autonomus sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

Penyelesaian stasioner dari persamaan (2.2) merupakan titik  $\bar{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  sedemikian hingga

$$f(\bar{x}) = 0,$$

yaitu penyelesaian yang tidak berubah terhadap waktu[7].

Pada sistem linear, jika sudah diperoleh titik tetap, maka dilakukan pencarian akar-akar persamaan karakteristik sistem untuk menentukan kestabilan dan struktur topologi lokal sistem. Akan tetapi, karena model sistem keuangan adalah sistem nonlinear, maka harus dilakukan linearisasi sistem terlebih dahulu.

Perilaku sistem nonlinear diwakili oleh bagian linearnya. Akan tetapi, tidak menutup kemungkinan dimana titik tetap sistem nonlinear bersifat stabil dalam bentuk linearnya, sedangkan titik tetap sistem bersifat tidak stabil dalam bentuk nonlinearnya, atau sebaliknya.

### ***Definisi 2.1(Titik Tetap Hiperbolik)[8]***

*Misalkan  $x = \bar{x}$  merupakan titik tetap dari  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , maka  $\bar{x}$  adalah titik tetap hiperbolik jika tidak ada nilai-nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  yang mempunyai bagian real sama dengan nol*

## **2.4 Linearisasi Sistem Nonlinear**

Diberikan persamaan nonlinear berikut

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.3}$$

Jika persamaan (2.3) mempunyai titik ekuilibrium  $\bar{x}$  maka persamaan (2.3) dapat ditulis sebagai

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x + \mathcal{O}(x) \tag{2.8}$$

Bentuk  $\mathcal{O}(x)$  disebut sebagai bagian nonlinear dari persamaan (2.3) dan  $Df(\bar{x})$  disebut sebagai bagian linear dari persamaan (2.3), dengan  $Df(\bar{x})$  disebut sebagai matriks Jacobian dari persamaan (2.3) pada titik ekuilibrium  $\bar{x}$ .

Berikut merupakan definisi mengenai matriks Jacobian.

**Definisi 2.2(Matriks Jacobian)[7]**

Diberikan fungsi  $f = f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$  dengan  $f_i \in C^1(E)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  dan  $E$  himpunan terbuka. Matriks

$$D(f(\bar{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Dinamakan matriks Jacobian dari  $f$  dari  $\bar{x}$ .

Jika linearisasi sistem nonlinear di sekitar titik tetap sudah dilakukan, maka bentuk linear sistem tersebut dicari akar-akar persamaan karakteristiknya.

**2.5 Akar-akar Persamaan Karakteristik Sistem**

Berikut ini diberikan definisi dari akar-akar persamaan karakteristik sistem :

**Definisi 2.3(Karakteristik Sistem)[9]**

Jika  $Df(\bar{x})$  adalah matriks berukuran  $n \times n$  maka vektor tak nol  $x$  dinamakan vektor karakteristik (vektor eigen) dari  $Df(\bar{x})$  jika memenuhi

$$Df(\bar{x})x = \lambda x \quad (2.5)$$

untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  disebut nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  dan  $x$  disebut vektor karakteristik (vektor eigen) yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .

Untuk mencari nilai karakteristik matriks  $Df(\bar{x})$  berukuran  $n \times n$ , maka persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$(Df(\bar{x}) - \lambda I)x = 0 \quad (2.6)$$

yang mempunyai penyelesaian  $x$  tak nol jika dan hanya jika

$$|Df(\bar{x}) - \lambda I| = 0 \quad (2.7)$$

Setelah diperoleh akar-akar persamaan karakteristik dari sistem nonlinear, perlu diselidiki apakah titik tetap sistem merupakan titik tetap hiperbolik atau nonhiperbolik.

## 2.6 Kestabilan dan Struktur Topologi Lokal Titik Tetap Hiperbolik

Jika titik tetap sistem nonlinear adalah titik tetap hiperbolik, maka perilaku sistem di persekitaran titik tetap sistem nonlinear pada dasarnya sama dengan bentuk linearnya. Oleh karena itu, kestabilan dapat ditentukan seperti pada analisis kestabilan linear[10]. Secara sederhana, titik tetap sistem dikatakan stabil jika penyelesaian sistem mendekati titik tetapnya dan dikatakan stabil asimtotis jika penyelesaian sistem tidak hanya mendekati, tetapi juga konvergen ke titik tetapnya.

Berikut ini diberikan teorema kestabilan asimtotis berdasarkan nilai karakteristik :

### ***Teorema 2.1(Kestabilan Asimtotis)[11]***

*Titik tetap  $x = \bar{x}$  dari sistem nonlinear stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai-nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  mempunyai bagian realnya yang bertanda negatif dan tidak stabil jika dan hanya jika sedikitnya satu dari nilai-nilai karakteristik dari  $Df(\bar{x})$  mempunyai bagian real yang bertanda positif.*

Misalkan  $Df(\bar{x})$  mempunyai dua nilai karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ , maka kriteria kestabilan dari titik tetap hiperbolik dan struktur topologi lokal berupa lintasan yang terbentuk di sekitar titik tetap berdasarkan nilai karakteristik dapat dilihat pada Tabel 2.1.



Tabel 2. 1[2] Kriteria Kestabilan Titik Tetap

Nilai Eigen	Struktur Topologi	Kestabilan
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotis jika semua nilai karakteristik negatif, Tidak stabil jika semua nilai karakteristik positif.
$\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Sadel	Tidak stabil.
$\lambda_1 = a + ib$ $\lambda_2 = a - ib$	Spiral	Stabil asimtotis jika bagian real nilai karakteristik negatif, Tidak stabil jika bagian real nilai karakteristik positif.

## 2.7 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Pada permasalahan tertentu titik setimbang tidak bisa diamati karena tanda bagian real nilai eigen tidak mudah ditentukan, oleh karena itu perlu digunakan metode lain untuk menentukan tanda bagian real nilai eigen  $\lambda$ . Sebagai contoh untuk matriks ukuran  $n \times n$  dengan  $n > 2$  tanda bagian real nilai eigen dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz (*Routh-Hurwitz Stability Criterion*)[6].

Persamaan karakteristik system orde ke- $n$  (tinggi), dinyatakan memakai formulasi umum :

$$q(\lambda) = h_0\lambda^n + h_1\lambda^{n-1} + \dots + h_n\lambda^0 + h_n = 0 \quad (2.8)$$

Susunan determinan dari Routh-Hurwitz tersebut adalah:

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_0 & \dots & 0 \\ h_3 & h_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2n-1} & h_{2n-2} & \dots & h_1 \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

Catatan: Koefisien-koefisien yang mempunyai harga lebih besar dari  $n$  atau bertanda negative harus diganti dengan nol.

akar-akar karakteristik persamaan (2.8) bernilai negatif. Dalam hal ini polinomial orde ke- $n$  tersebut akan mempunyai akar negatif jika dan hanya jika

- i.  $\Delta_1 = h_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$   
 $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$
- ii.  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_0 \\ h_3 & h_2 \end{vmatrix} > 0$   
 $h_1h_2 - h_3 > 0$
- iii.  $\Delta_3 = \begin{vmatrix} h_1 & h_0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 \\ h_5 & h_4 & h_3 \end{vmatrix} > 0$   
 $h_1h_2h_3 - h_3^2 - h_1^2h_4 > 0$

$\Delta_n =$  disusun seluruhnya seperti persamaan (2.9)  $> 0$

Apabila  $\Delta_{n-1} = 0$ , maka sistem tersebut stabil terbatas.

Dengan menggunakan Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz menyatakan bahwa sistem dikatakan stabil asimtotik ketika syarat-syarat tersebut terpenuhi.

## 2.8 Bifurkasi Hopf

Bifurkasi Hopf terjadi pada sistem nonlinear apabila sistem tersebut mempunyai titik tetap nonhiperbolik dan matriks linearisasinya mempunyai sepasang bilangan kompleks dengan nilai

karakteristik bagian real bernilai nol dan bagian imajiner tidak sama dengan nol (imajiner murni). Terjadinya bifurkasi Hopf menunjukkan eksistensi lintasan tertutup yang mengelilingi titik tetap tertentu (orbit periodik) dari suatu sistem.

***Teorema 2.2 (Bifurkasi Hopf)[12]***

*Asumsikan terdapat suatu kurva mulus dari titik tetap  $(x(\mu), \mu)$  dengan  $x(\mu_0) = x_0$  pada sistem  $\dot{x} = f_\mu(x)$ . Kondisi yang diberikan pada system tersebut adalah:*

*A1 Matriks Jacobian  $D_x f_{\mu_0}(x_0)$  memiliki sepasang nilai eigen murni imajiner dan nilai eigen lainnya adalah tidak nol. Maka dalam hal ini terdapat kurva mulus dari titik tetap  $(x(\mu), \mu)$  dengan  $x(\mu_0) = x_0$ . Nilai-nilai eigen  $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$  dari  $J(\mu) = D_x f_\mu(x(\mu))$  memiliki nilai eigen murni imajiner pada  $\mu = \mu_0$*

*A2  $\frac{d}{d\mu} \text{Re}(\lambda(\mu_0)) \neq 0$*

*Maka terdapat simple bifurkasi Hopf pada sistem  $\dot{x} = f_\mu(x)$ .*

*Dari sistem  $\dot{x} = f_\mu(x)$  akan diperoleh polinomial karakteristik atas Jacobi  $J(\mu)$  dengan*

$$p(\lambda; \mu) = \det(\lambda I_n - J(\mu)) = p_0(\mu) + p_1(\mu)\lambda + p_2(\mu)\lambda^2 + \dots + p_n(\mu)\lambda^n \quad (2.10)$$

*Untuk memenuhi kondisi A1 dan A2 maka berlaku dua kondisi berikut:*

*B1  $p_0(\mu_0) > 0, D_1(\mu_0) > 0, \dots, D_{n-2}(\mu_0) > 0, D_{n-1}(\mu_0) = 0$*

*B2  $dD_{n-1}(\mu_0)/d\mu \neq 0$*

*Dengan*

$$J_n(\mu) = \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) & \cdots & 0 \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{2n-1}(\mu) & p_{2n-2}(\mu) & \cdots & p_1(\mu) \end{pmatrix}$$

Dalam hal ini,  $D_1 = \det(J_1(\mu)) = p_1(\mu)$  beserta

$$D_2 = \det(J_2(\mu)) = \det \begin{pmatrix} p_1(\mu) & p_0(\mu) \\ p_3(\mu) & p_2(\mu) \end{pmatrix}$$

Setelah analisis kestabilan, struktur topologi, dan bifurkasi Hopf pada sistem keuangan, selanjutnya dicari penyelesaian numerik dari model tersebut dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta Orde-4 dan disimulasikan dengan menggunakan MATLAB.

## 2.6 Metode Numerik Runge-Kutta Orde-4

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler. Metode Euler merupakan metode perhitungan solusi numerik yang dilakukan langkah demi langkah dengan menggunakan pendekatan garis singgung. Diberikan persamaan differensial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (2.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.12)$$

dan titik pendekatan awal  $(t_0, x_0)$  dan  $(t_0, y_0)$ . Dengan metode Euler, diperoleh penyelesaian dari persamaan (2.11) dan (2.12) sebagai berikut

$$x_{j+1} = x_j + hf(t_j, x_j). \quad (2.13)$$

$$y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j). \quad (2.14)$$

dengan  $h = \Delta t$ .

Pada metode Runge-Kutta orde-4, digunakan empat nilai koefisien perbaikan yaitu  $k_1, k_2, k_3$ , dan  $k_4$  pada fungsi penyelesaian persamaan (2.11) dan (2.12) sehingga penyelesaian dari persamaan differensial (2.13) dan (2.14) menjadi

$$x_{j+1} = x_j + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}) \quad (2.15)$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y}) \quad (2.16)$$

Dengan

$$k_{1,x} = hf_1(t_j, x_j, y_j)$$

$$k_{1,y} = hf_2(t_j, x_j, y_j)$$

$$k_{2,x} = hf_1\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}\right)$$

$$k_{2,y} = hf_2\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}\right)$$

$$k_{3,x} = hf_1\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}\right)$$

$$k_{3,y} = hf_2\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}\right)$$

$$k_{4,x} = hf_1(t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y})$$

$$k_{4,y} = hf_2(t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y})[9].$$

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

Bab ini menguraikan metode yang digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian dapat berjalan sistematis.

#### **1. Studi Literatur**

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa tugas akhir, jurnal, buku, maupun artikel terkait.

#### **2. Mengkaji Model Matematika Sistem Keuangan**

Pada tahap ini, dilakukan kajian terhadap model sistem keuangan agar representasi dinamika sistem keuangan dalam kehidupan nyata dapat dipahami melalui model matematika sistem keuangan.

#### **3. Mencari Titik Tetap dan Translasi Titik Tetap**

Pada tahap ini, dicari titik tetap dari model matematika sistem keuangan, yaitu titik yang diperoleh ketika sistem dalam keadaan stasioner atau ketika tidak terjadi perubahan terhadap waktu. Dilakukan translasi titik tetap sistem ke titik asal untuk mempermudah analisis kestabilan dan eksistensi bifurkasi Hopf pada model sistem keuangan.

#### **4. Linearisasi Sistem Nonlinear**

Pada tahap ini, dilakukan pelinearan terhadap sistem model sistem keuangan karena model sistem keuangan adalah model sistem dinamik nonlinear.

### **5. Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz**

Pada tahap ini, diselidiki kestabilan dari titik tetap dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz.

### **6. Menyelidiki Eksistensi Bifurkasi Hopf**

Pada tahap ini, berdasarkan titik tetap yang dicari pada tahap sebelumnya, selanjutnya pada tahap ini dilakukan analisis mengenai eksistensi bifurkasi Hopf.

### **7. Simulasi Numerik**

Pada tahap ini, dilakukan analisis hubungan antara bilangan reproduksi dasar dan stabilitas titik kesetimbangan dengan metode numerik Runge Kutta orde 4, menggunakan *software* MATLAB2016b.

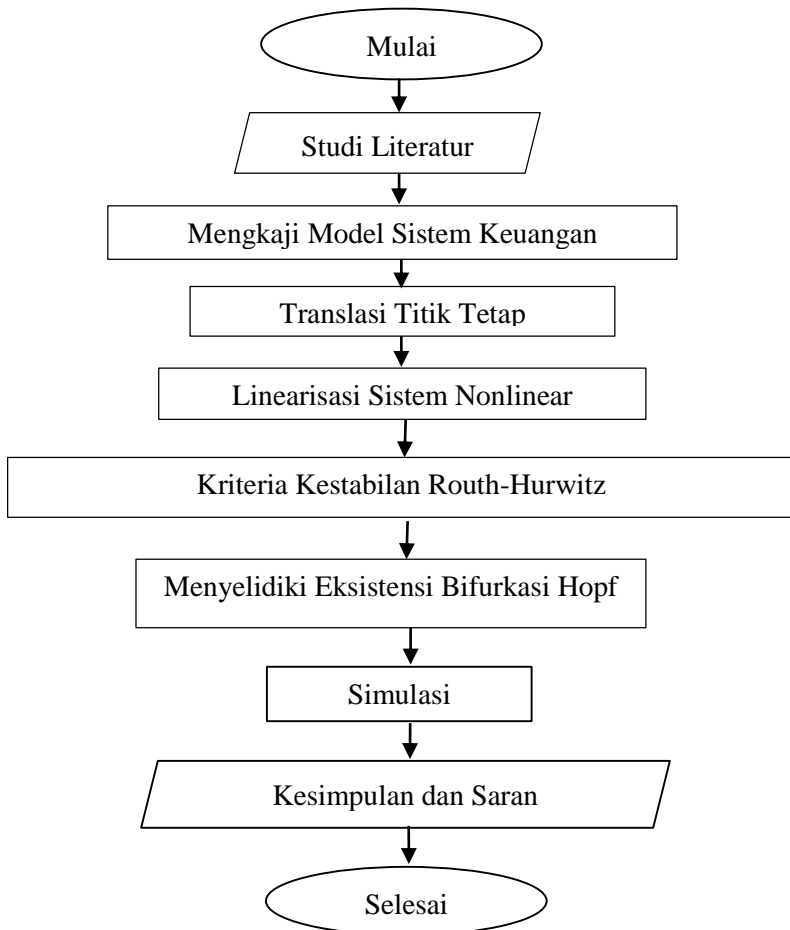
### **8. Kesimpulan dan Saran**

Pada tahap terakhir ini, dilakukan penarikan simpulan dari hasil pembahasan sebelumnya. Selanjutnya, diberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

### **9. Diagram Alir**

Pada tahap ini disusun diagram alir pada **Gambar 3.1** sebagai langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian.





*Gambar 3. 1 Diagram Alir Penelitian*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang pembahasan mengenai representasi sistem keuangan pada model matematika sistem keuangan, titik tetap model matematika sistem keuangan, penentuan kestabilan model matematika sistem keuangan, analisis bifurkasi Hopf dari model matematika sistem keuangan dan penyelesaian numerik dari model matematika sistem keuangan yang disimulasikan dengan menggunakan program MATLAB.

### 4.1 Titik Tetap Sistem

Titik tetap  $E(x_0, y_0, z_0, u_0)$  adalah titik yang diperoleh ketika sistem keuangan berada pada keadaan stasioner. Keadaan stasioner adalah keadaan dimana tidak terjadi perubahan pada suku bunga, tingkat permintaan investasi, indeks harga dan kontrol input seiring dengan perubahan waktu. Titik tetap dari sistem (2.1) diperoleh ketika laju perubahan suku bunga, laju perubahan tingkat permintaan investasi, laju perubahan indeks harga instrumen dan laju perubahan kontrol input sama dengan nol, sehingga diperoleh

$$\begin{cases} z + (y - a)x = 0 \\ 1 - by - x^2 = 0 \\ -x - cz + u = 0 \\ -dxy - ku - mz = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Selanjutnya, dicari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan (4.1) sebagai berikut :

- Penyelesaian persamaan (4.1) yang kedua
$$1 - by - x^2 = 0$$
$$x^2 = 1 - by$$
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - by}$$
- Substitusi  $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - by}$  pada persamaan (4.1) yang pertama

$$z + (y - a)x = 0$$

$$z_{1,2} = \pm(a - y)\sqrt{1 - by}$$

- Substitusi  $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - by}$  dan  $z_{1,2} = \pm(a - y)\sqrt{1 - by}$  pada persamaan (4.1) yang ketiga

$$-x - cz + u = 0$$

$$u = x + cz$$

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{1 - by} + c(\pm(a - y)\sqrt{1 - by})$$

$$u_{1,2} = \pm\sqrt{1 - by}(1 + ac - cy)$$

- Substitusi  $x_{1,2} = \pm\sqrt{1 - by}$ ,  $z_{1,2} = \pm(a - y)\sqrt{1 - by}$  dan  $u_{1,2} = \pm\sqrt{1 - by}(1 + ac - cy)$  pada persamaan (4.1) yang keempat

$$-dxy - ku - mz = 0$$

$$\sqrt{1 - by}[(d - ck - m)y + k + ack + am] = 0$$

Maka dari persamaan tersebut dapat kita ketahui bahwa

$$\sqrt{1 - by} = 0 \text{ atau } (d - ck - m)y + k + ack + am = 0$$

$$\sqrt{1 - by} = 0$$

$$\text{Maka didapat nilai } y = \frac{1}{b} \text{ atau } y = \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m}$$

Berdasarkan perhitungan di atas, maka titik tetap yang diperoleh bergantung dalam dua kondisi, yaitu :

1. Jika  $y_0 = \frac{1}{b}$  substitusikan ke persamaan  $x$ ,  $z$ , dan  $u$

dapat kita ketahui bahwa nilai  $\sqrt{1 - by} = 0$  Maka dapat peroleh titik tetap

$$x_0 = 0$$

$$z_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$(x_0, y_0, z_0, u_0) = \left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right).$$

Pada kondisi ini, diperoleh satu titik tetap  $E_0 \left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right)$ .

2. Jika  $y_0 = \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m}$  dengan syarat  $d - ck - m \neq 0$  dan dapat kita misalkan  $\Gamma_1 = d - ck - m$  dan  $\Gamma_2 = k + ack + am$  dengan  $0 < \Gamma_1 < b\Gamma_2$  maka didapat titik tetap  $E_{1,2}(\pm x_0, y_0, \mp z_0, \mp u_0)$  dimana

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \\ y_0 &= \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \\ z_0 &= (ad + k) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}} \\ u_0 &= (d + acd - m) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

### 4.3 Analisis Kestabilan

Analisis kestabilan dan struktur topologi lokal digunakan untuk mengetahui perilaku sistem keuangan. Pada Tugas Akhir ini, dilakukan analisis kestabilan sistem pada titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right)$ .

#### 4.3.1 Translasi Titik Tetap

Sistem (2.1) ditranslasi terlebih dahulu sehingga titik tetap  $E_0\left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right)$  bergeser menjadi  $E_0^*(0, 0, 0, 0)$ . Hal ini dilakukan untuk mempermudah analisis kestabilan.

Transformasi :

$$X = x - 0 \rightarrow x = X$$

$$Y = y - \frac{1}{b} \rightarrow y = Y + \frac{1}{b}$$

$$Z = z - 0 \rightarrow z = Z$$

$$U = u - 0 \rightarrow u = U$$

sehingga

- $\dot{x} = z + (y - a)x$

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= Z + \left(Y + \frac{1}{b} - a\right)X = \left(\frac{1}{b} - a\right)X + Z + XY \\
\bullet \quad \dot{Y} &= 1 - bY - X^2 \\
\dot{Y} &= 1 - b\left(Y + \frac{1}{b}\right) - X^2 = 1 - bY - 1 - X^2 = -bY - X^2 \\
\bullet \quad \dot{Z} &= -X - cZ + U \\
\dot{Z} &= -X - cZ + U \\
\bullet \quad \dot{U} &= -dXY - kU - mZ \\
\dot{U} &= -dX\left(Y + \frac{1}{b}\right) - kU - mZ
\end{aligned}$$

Setelah ditransformasi, sistem (2.1) menjadi :

$$\begin{cases} \dot{X} = \left(\frac{1}{b} - a\right)X + Z + XY \\ \dot{Y} = -bY - X^2 \\ \dot{Z} = -X - cZ + U \\ \dot{U} = -dX\left(Y + \frac{1}{b}\right) - kU - mZ \end{cases} \quad (4.2)$$

#### 4.3.2 Linearisasi Sistem

Sistem (4.2) merupakan sistem nonlinear. Oleh karena itu, sistem harus dilinearkan terlebih dahulu di sekitar titik tetap  $E_0(0,0,0,0)$ .

Misalkan  $A = \begin{bmatrix} f(X,Y,Z,U) \\ g(X,Y,Z,U) \\ h(X,Y,Z,U) \\ i(X,Y,Z,U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{U} \end{bmatrix}$  dan  $DA$  adalah matriks

Jacobian dari  $A$  yang merupakan bentuk linear dari sistem (4.2), maka

$$DA = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} & \frac{\partial f}{\partial U} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} & \frac{\partial g}{\partial Z} & \frac{\partial g}{\partial U} \\ \frac{\partial h}{\partial X} & \frac{\partial h}{\partial Y} & \frac{\partial h}{\partial Z} & \frac{\partial h}{\partial U} \\ \frac{\partial i}{\partial X} & \frac{\partial i}{\partial Y} & \frac{\partial i}{\partial Z} & \frac{\partial i}{\partial U} \end{bmatrix}$$

dengan

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial X} &= \left(\frac{1}{b} - a\right) + Y, & \frac{\partial f}{\partial Y} &= X, & \frac{\partial f}{\partial Z} &= 1, & \frac{\partial f}{\partial U} &= 0 \\ \frac{\partial g}{\partial X} &= -2X, & \frac{\partial g}{\partial Y} &= -b, & \frac{\partial g}{\partial Z} &= 0, & \frac{\partial g}{\partial U} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial X} &= -1, & \frac{\partial h}{\partial Y} &= 0, & \frac{\partial h}{\partial Z} &= -c, & \frac{\partial h}{\partial U} &= 1 \\ \frac{\partial i}{\partial X} &= -d\left(Y + \frac{1}{b}\right), & \frac{\partial i}{\partial Y} &= -dX, & \frac{\partial i}{\partial Z} &= -m, & \frac{\partial i}{\partial U} &= -k \end{aligned}$$

sehingga diperoleh matriks Jacobian dari sistem (4.2) adalah sebagai berikut :

$$DA = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} & \frac{\partial f}{\partial Z} & \frac{\partial f}{\partial U} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} & \frac{\partial g}{\partial Z} & \frac{\partial g}{\partial U} \\ \frac{\partial h}{\partial X} & \frac{\partial h}{\partial Y} & \frac{\partial h}{\partial Z} & \frac{\partial h}{\partial U} \\ \frac{\partial i}{\partial X} & \frac{\partial i}{\partial Y} & \frac{\partial i}{\partial Z} & \frac{\partial i}{\partial U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{b} - a\right) + Y & X & 1 & 0 \\ -2X & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 1 \\ -d\left(Y + \frac{1}{b}\right) & -dX & -m & -k \end{bmatrix}.$$

Dengan kita misalkan bahwa :

$$y_* = \frac{1}{b} + Y$$

$$x_* = X$$

Jacobian disekitar titik tetap  $E_*(x_*, y_*, z_*, u_*)$ , yaitu

$$DA_{(x_*, y_*, z_*, u_*)} = \begin{bmatrix} (y_* - a) & x_* & 1 & 0 \\ -2x_* & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 1 \\ -dy_* & -dx_* & -m & -k \end{bmatrix}$$

Dimana dapat kita ketahui  $E_*$  adalah kita misalkan titik tetap dimana didalamnya ada  $E_0$  dan  $E_{1,2}$

Jacobian di sekitar titik tetap  $E_0(0, \frac{1}{b}, 0, 0)$ , yaitu :

$$DA_{(0, \frac{1}{b}, 0, 0)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{b} - a\right) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 1 \\ -\frac{2d}{b} & 0 & -m & -k \end{bmatrix}$$

$$DA_{(0, 0, 0, 0)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{b} - a\right) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -c & 1 \\ -\frac{d}{b} & 0 & -m & -k \end{bmatrix}$$

#### 4.3.3 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Dalam menentukan kestabilan sistem, diperlukan nilai karakteristik dari sistem. Berdasarkan Definisi 2.3, nilai karakteristik sistem dapat diperoleh dari Jacobian sistem  $DA_{(x_*, y_*, z_*, u_*)}$  yang memenuhi  $(DA_{(x_*, y_*, z_*, u_*)} - \lambda I)x = 0$  dengan  $\lambda$  adalah nilai karakteristik sistem dan  $x$  adalah vektor karakteristik sistem. Maka akar-akar karakteristik pada persamaan dengan titik tetap  $(x_*, y_*, z_*, u_*)$  adalah

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + (a + b + c + k - y_*)\lambda^3 + (1 + ab + ac + bc + ak + bk + \\ &ck + m + 2x_*^2 - by_*)\lambda^2 + (b + abc + k + abk + ack + bck + \\ &am + bm + 2cx_*^2 - bcy_* + dy_* - bky_* - cky_* - my_*)\lambda + bk + \\ &abck + abm - 2dx_*^2 + 2ckx_*^2 + 2mx_*^2 + bdy_* - bcky_* - \\ &bmy_* = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$



Persamaan tersebut sulit untuk diselesaikan menggunakan cara pemfaktoran biasa. Oleh karena itu dalam menentukan kestabilan pada titik tersebut maka akan digunakan kriteria stabilitas Routh-Hurwitz dalam menganalisa kestabilan pada titik ini seperti yang telah dituliskan pada [12]. maka persamaan karakteristik sistem menjadi:

$$h_0 s^4 + h_1 s^3 + h_2 s^2 + h_3 s + h_4 = 0 \quad (4.4)$$

Dengan nilai

$$h_0 = 1,$$

$$h_1 = a + b + c + k - y_*,$$

$$h_2 = 1 + ab + ac + bc + ak + bk + ck + m + 2x_*^2 - by_*,$$

$$h_3 = b + abc + k + abk + ack + bck + am + bm + 2cx_*^2 - bcy_* + dy_* - bky_* - cky_* - my_*,$$

$$h_4 = bk + abck + abm - 2dx_*^2 + 2ckx_*^2 + 2mx_*^2 + bdy_* - bcky_* - bmy_*$$

Untuk mengetahui nilai eigen yang bagian riilnya bernilai negatif dari persamaan karakteristik tersebut dapat dibentuk suatu matrik determinan yang sering disebut sebagai determinan Routh-Hurwitz sebagai berikut :

$$G = \begin{vmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & 0 \\ h_5 & h_4 & h_3 & 0 \\ h_7 & h_6 & h_5 & h_4 \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

Berdasarkan [12] agar nilai-nilai karakteristik pada persamaan (4.4) bernilai negatif maka harus berlaku  $h_4 > 0$  dengan

1.  $\Delta_1 = 0$   
 $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$
2.  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_1 & h_0 \\ h_3 & h_2 \end{vmatrix} = h_1 h_2 - h_3$   
 $h_1 h_2 - h_3 > 0$

$$3. \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} h_1 & h_0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 \\ h_5 & h_4 & h_3 \end{vmatrix} = h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4$$

$$h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$$

Oleh karena itu pada persamaan (4.4) agar sistem bersifat stabil, jika diambil nilai  $h_1 > 0$  sehingga diperoleh

$$a + b + c + k > y_*$$

Yang mengindikasikan bahwa jumlahan dari rasio tabungan, rasio biaya per investasi, rasio elastisitas permintaan beserta amplitude akan lebih besar jika dibandingkan dengan rasio tingkat permintaan investasi.

Pada bagian selanjutnya akan diambil  $h_2 > 0$  agar kestabilan tercapai. Jika  $a, b, c, k > 0$  maka  $ab, ac, bc, ak, bk, ck > 0$  dengan begitu pada  $h_2$  juga dapat diambil nilai bahwa  $ab + ac + bc + ak + bk + ck > 0$

Oleh karena itu untuk  $h_2 > 0$  sedemikian hingga akan diperoleh

$$1 + b + ac + bc + ak + bk + ck > by_* - m - 2x_*^2$$

Pada bagian selanjutnya akan diambil  $h_3 > 0$  sehingga diperoleh

$$b + abc + k + abk + ack + bck + am + bm > bcy_* - 2cx_*^2 - dy_* + bky_* + cky_* + my_*$$

Pada bagian selanjutnya juga diambil  $h_4 > 0$  sehingga diperoleh

$$bk + abck + abm > 2dx_*^2 - 2ckx_*^2 - 2mx_*^2 - bdy_* + bcky_* + bmy_*$$

Agar akar-akar karakteristik persamaan (4.3) bernilai negatif. Dalam hal ini polinomial orde ke empat tersebut akan mempunyai akar negatif jika dan hanya jika  $h_1 h_2 - h_3 > 0$  dan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$ . Pada tahap ini akan diambil kesimpulan bahwa  $h_1 > 0$ ,  $h_2 > 0$ ,  $h_3 > 0$  dan  $h_4 > 0$ .

Maka dapat diperoleh  $h_1 h_2 - h_3 > 0$  sehingga

$$h_1 h_2 > h_3$$

Oleh karena dapat diperoleh  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$  sehingga

$$h_1 h_2 h_3 > h_3^2 + h_1^2 h_4$$

Jadi dengan mengambil nilai  $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$ ,  $h_1 h_2 - h_3 > 0$  dan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$  maka model sistem keuangan tersebut pada titik tetap  $(x_*, y_*, z_*, u_*)$  akan bersifat stabil. Namun jika sebaliknya diambil kondisi bahwa  $h_1 < 0$  maka sistem akan berada pada kondisi tak stabil.

#### 4.4 Analisis Bifurkasi Hopf

Telah dijelaskan sebelumnya bahwa Persamaan 4.4 akan bersifat stabil jika berlaku  $h_1 > 0$ ,  $h_2 > 0$ ,  $h_3 > 0$ ,  $h_4 > 0$ ,  $h_1 h_2 - h_3 > 0$ , dan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$ . Karena pada titik ini berlaku polinomial yaitu

$$h_0 s^4 + h_1 s^3 + h_2 s^2 + h_3 s + h_4 = 0 \quad (4.6)$$

Maka berdasarkan teorema 2.4 bifurkasi Hopf pada titik tetap tersebut terjadi jika  $h_0 > 0$ ,  $h_1 > 0$ ,  $h_1 h_2 - h_3 > 0$  dan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 = 0$  berlaku sedemikian hingga

$$\frac{d}{db} (h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4) \neq 0$$

Sesuai pada subbab sebelumnya dalam hal ini akan diambil  $h_1 \geq 0$ ,  $h_2 \geq 0$ , maka jelas bahwa  $h_1 h_2 h_3 = h_3^2 + h_1^2 h_4$  agar syarat awal bifurkasi Hopf terjadi dapat dipenuhi dimana  $h_1 h_2 h_3 \neq h_3^2 + h_1^2 h_4$  untuk  $h_1 < 0$  dan  $h_2 < 0$ .

Untuk mendapatkan turunan dari persamaan diatas maka dapat diperoleh nilai nilai sebagai berikut :

$$\frac{d}{db} h_1 = 1 \quad (4.7)$$

$$\frac{d}{db} h_2 = a + c + k - y_* \quad (4.8)$$

$$\frac{d}{db} h_3 = 1 + ac + ak + ck + m + (-cy_*) - ky_* \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{db} h_4 = k + ack + am + ck + m + dy_* - cky_* - my_* \quad (4.10)$$

Dalam hal ini dapat berlaku

$$\begin{aligned} \frac{d}{db}(h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4) &= (h_2 h_3 - 2h_1 h_4) \frac{d}{db} h_1 + \\ h_1 h_3 \frac{d}{db} h_2 + (h_1 h_2 - 2h_3) \frac{d}{db} h_3 - h_1^2 \frac{d}{db} h_4 \end{aligned} \quad (4.11)$$

substitusikan persamaan (4.7) sampai (4.10) kedalam persamaan (4.11) sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{db}(h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4) &= (h_2 h_3 - 2h_1 h_4) + h_1 h_3(a + c + k - y_*) \\ &+ (h_1 h_2 - 2h_3)(1 + ac + ak + ck + m + (-cy_*) - ky_*) - \\ &h_1^2(k + ack + am + ck + m + dy_* - cky_* - my_*) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Berdasarkan persamaan (4.12) maka jelas bahwa

$$\begin{aligned} \frac{d}{db}(h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4) &= (h_2 h_3 - 2h_1 h_4) \frac{d}{db} h_1 + h_1 h_3 \frac{d}{db} h_2 + \\ &(h_1 h_2 - 2h_3) \frac{d}{db} h_3 - h_1^2 \frac{d}{db} h_4 \neq 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan pembuktian syarat transversal maka dapat disimpulkan bahwa pada titik tetap  $E_*(x_*, y_*, z_*, u_*)$  terdapat parameter  $b$  dimana dengan sedikit pergeseran nilai pada  $b$  dapat menyebabkan perubahan kestabilan pada sistem. Nilai kritis dari parameter  $b$  dimulai ketika kondisi  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 = 0$ . Sehingga benar bahwa pada titik tetap ini memiliki kemungkinan akan adanya bifurkasi Hopf.

**Catatan :** demi penyerdehanaan sistem perilaku dinamis pada sistem (2.1) diberikan nilai-nilai parameter tetap seperti pada [6] dengan  $a = 0.9$ ,  $c = 1.5$ ,  $d = 0.2$ , dan  $k = 0.05$ .

1. Ketika  $m = 0.005$ , persamaan (2.1) mempunyai tiga titik setimbang untuk  $E_0$  dan  $E_{1,2}$  :

- a.  $E_0(0, \frac{1}{b}, 0, 0)$

- Menunjukkan  $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$

$$h_1 = a + b + c + k - \left(\frac{1}{b} + Y\right)$$

$$h_2 = 1 + ab + ac + bc + ak + bk + ck + m + 2X^2 - b\left(\frac{1}{b} + Y\right) - c\left(\frac{1}{b} + Y\right)$$

$$h_3 = b + abc + k + abk + ack + bck + am + bm + 2cX^2 - bc\left(\frac{1}{b} + Y\right) + d\left(\frac{1}{b} + Y\right) - bk\left(\frac{1}{b} + Y\right) - ck\left(\frac{1}{b} + Y\right) - m\left(\frac{1}{b} + Y\right)$$

$$h_4 = bk + abck + abm - 2dX^2 + 2ckX^2 + 2mX^2 + bd\left(\frac{1}{b} + Y\right) - bck\left(\frac{1}{b} + Y\right) - bm\left(\frac{1}{b} + Y\right)$$

$$h_1, h_2, h_3, h_4 > 0 \text{ jika } b > 0.6459$$

- Menunjukkan  $h_1 h_2 - h_3 > 0$   

$$\left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + Y \right) \right) \left( 1 + ab + ac + bc + ak + bk + ck + m + 2X^2 - b\left(\frac{1}{b} + Y\right) - c\left(\frac{1}{b} + Y\right) \right) - \left( b + abc + k + abk + ack + bck + am + bm + 2cX^2 - bc\left(\frac{1}{b} + Y\right) + d\left(\frac{1}{b} + Y\right) - bk\left(\frac{1}{b} + Y\right) - ck\left(\frac{1}{b} + Y\right) - m\left(\frac{1}{b} + Y\right) \right) \right] > 0$$

$$\left[ \left( 2.45 + b - \frac{2}{b} \right) \left( 0.475 + 2.405b - \frac{3}{b} \right) - \left( 1.35b + 0.05 + 0.0045b + 0.675 + 0.075b + 0.0045 + 0.005b + 3 + \frac{0.4}{b} + 0.1 - \frac{0.15}{b} - \frac{0.01}{b} \right) \right] > 0$$

$$h_1 h_2 - h_3 > 0 \text{ jika } b > 0.6879$$

- Menunjukkan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$   

$$\left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + Y \right) \right) \left( 1 + ab + ac + bc + \right. \right.$$

$$ak + bk + ck + m + 2X^2 - b \left( \frac{1}{b} + Y \right) -$$

$$c \left( \frac{1}{b} + Y \right) \left( b + abc + k + abk + ack + bck + \right.$$

$$am + bm + 2cX^2 - bc \left( \frac{1}{b} + Y \right) + d \left( \frac{1}{b} + Y \right) -$$

$$bk \left( \frac{1}{b} + Y \right) - ck \left( \frac{1}{b} + Y \right) - m \left( \frac{1}{b} + Y \right) \left. \right) -$$

$$\left( b + abc + k + abk + ack + bck + am + bm + \right.$$

$$2cX^2 - bc \left( \frac{1}{b} + Y \right) + d \left( \frac{1}{b} + Y \right) - bk \left( \frac{1}{b} + Y \right) -$$

$$ck \left( \frac{1}{b} + Y \right) - m \left( \frac{1}{b} + Y \right) \left. \right)^2 - \left( a + b + c + k - \right.$$

$$\left. \left( \frac{1}{b} + Y \right) \right)^2 \left( bk + abck + abm - 2dX^2 + 2ckX^2 + \right.$$

$$2mX^2 + bd \left( \frac{1}{b} + Y \right) - bck \left( \frac{1}{b} + Y \right) - bm \left( \frac{1}{b} + \right.$$

$$\left. Y \right) \left. \right] > 0$$

$$\left[ \left( 2.45 + b - \frac{2}{b} \right) \left( 0.475 + 2.405b - \frac{3}{b} \right) \left( 3.8295 + \right. \right.$$

$$1.4345b + \frac{0.4}{b} - \frac{0.15}{b} - \frac{0.01}{b} \left. \right) - \left( 3.8295 + 1.4345b + \right.$$

$$\frac{0.4}{b} - \frac{0.15}{b} - \frac{0.01}{b} \left. \right)^2 - \left( 2.45 + b - \frac{2}{b} \right)^2 \left( 0.122b + \right.$$

$$0.24 \left. \right) \left. \right] > 0$$

$$h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0 \text{ jika } b > 0.7068$$

Maka  $E_0$  stabil asimtotik saat  $b > 0.7068$  karena syarat-syarat terpenuhi seperti yang sudah dijelaskan pada subbab sebelumnya tentang kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

- b.  $E_{1,2}(\pm x_0, y_0, \mp z_0, \mp u_0)$  dengan  $\Gamma_1 = d - ck - m$  dan  $\Gamma_2 = -(k + ack + am)$  dengan  $0 < \Gamma_1 < b\Gamma_2$

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \\ y_0 &= \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \\ z_0 &= (ad + k) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}} \\ u_0 &= (d + acd - m) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

- Menunjukkan  $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$

$$h_1 = a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) > 0$$

$$\begin{aligned} h_2 &= 1 + ab + ac + bc + ak + bk + ck + m \\ &\quad + 2 \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\ &\quad - c \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 = & b + abc + k + abk + ack + bck + am \\
& + bm + 2c \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 \\
& - bc \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) + d \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\
& - bk \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\
& - m \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_4 = & bk + abck + abm - 2d \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 \\
& + 2ck \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 \\
& + 2m \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 + bd \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\
& - bck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bm \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)
\end{aligned}$$

$$h_1, h_2, h_3, h_4 > 0 \text{ jika } b > 0.51362$$

$$h_1, h_2, h_3, h_4 > 0 \text{ untuk } b \in \mathbb{R}^+$$

- Menunjukkan  $h_1 h_2 - h_3 > 0$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \right) \left( 1 + ab + ac + \right. \right. \\
& bc + ak + bk + ck + m + 2 \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \right. \\
& \left. \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - c \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \left. \right) - \left( b + abc + k + abk + ack + \right. \\
& \left. bck + am + bm + 2c \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - bc \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) + \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& d \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bk \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - m \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \Bigg] > 0 \\
& \left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \right) \left( 1 + ab + \right. \right. \\
& ac + bc + ak + bk + ck + m + \\
& 2 \left( \frac{(d-ck-m)-b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \right. \\
& \left. \frac{k+ack+am}{d-ck-m} \right) - c \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \Bigg) - \left( b + abc + \right. \\
& k + abk + ack + bck + am + bm + \\
& 2c \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 - bc \left( \frac{1}{b} + \right. \\
& \left. \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) + d \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - \\
& bk \left( \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - \\
& \left. \left. m \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \right) \right] > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ (2.45 + b - 1.016) \left( 2.45b + 2.475 + \right. \right. \\
& 2 \left( \frac{0.12+b(0.122)}{0.12} \right)^2 - (b + 1.5) \left( \frac{1}{b} + \frac{-0.122}{0.12} \right) \Bigg) - \\
& \left( 2.475b + 0.122 + 3 \left( \frac{0.12+b(0.122)}{0.12} \right)^2 - 1.55b + \right. \\
& \left. \left. \left( \frac{1}{b} + \frac{-0.122}{0.12} \right) + 0.12 \left( \frac{1}{b} + \frac{-0.122}{0.12} \right) \right) \right] > 0
\end{aligned}$$

$E_{1,2}$  tidak stabil untuk  $b \in \mathbb{R}^+$ . Pada syarat stabil adalah ketika  $h_1 h_2 - h_3 > 0$  namun dapat kita hitung

dengan memasukkan nilai-nilai parameter syarat tidak terpenuhi karena  $h_1 h_2 - h_3 < 0$ .

2. Ketika  $b = 0.2$ , persamaan (2.1) mempunyai tiga titik setimbang untuk  $E_0$  dan  $E_{1,2}$  :

a.  $E_0 \left( 0, \frac{1}{b}, 0, 0 \right)$

- Menunjukkan  $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$

$$h_1 = a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + Y \right)$$

$$h_1 = 0.9 + 0.2 + 1.5 + 0.05 - \frac{2}{0.2} = -7.35$$

$-7.35 < 0$  maka dapat kita ketahui sistem tidak stabil untuk  $m \in \mathbb{R}^+$  karena  $h_1 < 0$ .

- b.  $E_{1,2}(\pm x_0, y_0, \mp z_0, \mp u_0)$  dengan  $\Gamma_1 = d - ck - m$  dan  $\Gamma_2 = -(k + ack + am)$  dengan  $0 < \Gamma_1 < b\Gamma_2$

$$x_0 = \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

$$y_0 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

$$z_0 = (ad + k) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}}$$

$$u_0 = (d + acd - m) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}}$$

- Menunjukan  $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$

$$h_1 = a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) > 0$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= 1 + ab + ac + bc + ak + bk + ck + m \\
&\quad + 2 \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\
&\quad - c \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_3 &= b + abc + k + abk + ack + bck + am + bm \\
&\quad + 2c \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - bc \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\
&\quad + d \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bk \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\
&\quad - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - m \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_4 &= bk + abck + abm - 2d \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 \\
&\quad + 2ck \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 \\
&\quad + 2m \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 + bd \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \\
&\quad - bck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bm \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)
\end{aligned}$$

$E_{1,2}$  stabil asimtotik saat  $m > 0.125$

- Menunjukkan  $h_1 h_2 - h_3 > 0$

$$\begin{aligned}
&\left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \right) \left( 1 + ab + ac + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. bc + ak + bk + ck + m + 2 \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - c \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \right) - \left( b + abc + k + abk + ack + \right.
\end{aligned}$$

$$bck + am + bm + 2c \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - bc \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) + d \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bk \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - m \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \Big] > 0$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \right) \left( 1 + ab + ac + bc + ak + bk + ck + m + \right. \right. \\ & 2 \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - c \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \Big) - \left( b + \right. \\ & abc + k + abk + ack + bck + am + bm + \\ & 2c \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 - bc \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) + d \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) + \\ & bk \left( \frac{k+ack+am}{d-ck-m} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - m \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \Big] > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 2.65 - \left( 5 + \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \right) \left( 2.96 + m + \right. \right. \\ & 2 \left( \frac{0.1015-1.18m}{0.125-m} \right)^2 - 1.7 \left( 5 + \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \Big) - \\ & \left( 0.529 + 1.1m + 3 \left( \frac{0.1015-1.18m}{0.125-m} \right)^2 - (0.195 + \right. \\ & m) \left( 5 + \frac{0.1175+0.9m}{0.125-m} \right) \Big] > 0 \end{aligned}$$

$E_{1,2}$  stabil asimtotik saat  $m > 0.4029$ .

- Menunjukkan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$ 

$$\left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \right) \left( 1 + ab + ac + bc + \right. \right.$$

$$ak + bk + ck + m + 2 \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) -$$

$$c \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \left( b + abc + k + abk + ack + bck + \right.$$

$$am + bm + 2c \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - bc \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) + d \left( \frac{1}{b} + \right.$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bk \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - m \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \left. \right) -$$

$$\left( b + abc + k + abk + ack + bck + am + bm + \right.$$

$$2c \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 - bc \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) + d \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bk \left( \frac{1}{b} + \right.$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - m \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \left. \right)^2 - \left( a + b + c + \right.$$

$$k - \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \left. \right)^2 \left( bk + abck + abm - 2d \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 + \right.$$

$$2ck \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 + 2m \left( \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1} \right)^2 + bd \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) -$$

$$bck \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) - bm \left( \frac{1}{b} + \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} \right) \left. \right) \Big] > 0$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \right) \left( 1 + ab + \right. \right. \\
& ac + bc + ak + bk + ck + m + \\
& 2 \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 - b \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - \\
& c \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \Big) - \left( b + abc + k + abk + ack + \right. \\
& bck + am + bm + 2c \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 - \\
& bc \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) + d \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - \\
& bk \left( \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - ck \left( \frac{1}{b} + \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - m \left( \frac{1}{b} + \right. \\
& \left. \left. \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \right)^2 - \left( a + b + c + k - \left( \frac{1}{b} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \right)^2 \left( bk + abck + abm - \right. \\
& 2d \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 + \\
& 2ck \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 + \\
& 2m \left( \frac{(d-ck-m)+b(k+ack+am)}{d-ck-m} \right)^2 + bd \left( \frac{1}{b} + \right. \\
& \left. \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) - bck \left( \frac{1}{b} + \frac{k+ack+am}{d-ck-m} \right) - bm \left( \frac{1}{b} + \right. \\
& \left. \left. \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m} \right) \right) \Big] > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left( 2.65 - \left( \frac{1}{0.2} + \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \right) \left( 2.96 + m + \right. \right. \\
& 2 \left( \frac{(0.125-m)+0.2(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right)^2 - 1.7 \left( \frac{1}{0.2} + \right. \\
& \left. \left. \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \right) \left( 0.529 + 1.1m + \right. \\
& 3 \left( \frac{(0.125-m)+0.2mmnnmmmm(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right)^2 - \\
& (0.195 + m) \left( \frac{1}{0.2} + \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \right) - \left( 0.529 + \right. \\
& 1.1m + 3 \left( \frac{(0.125-m)+0.2(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right)^2 - (0.195 + \\
& m) \left( \frac{1}{0.2} + \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \right)^2 - \left( 2.65 - \left( \frac{1}{0.2} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \right)^2 \left( 0.0235 + 0.18m - \right. \\
& 0.4 \left( \frac{(0.125-m)+0.2(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right)^2 + \\
& 0.15 \left( \frac{(0.125-m)+0.2(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right)^2 + \\
& 2m \left( \frac{(0.125-m)+0.2(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right)^2 + 0.04 \left( \frac{1}{0.2} + \right. \\
& \left. \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) - 0.015 \left( \frac{1}{0.2} + \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) - \\
& \left. \left. 0.2m \left( \frac{1}{0.2} + \frac{-(0.1175+0.9m)}{0.125-m} \right) \right) \right] > 0
\end{aligned}$$

$E_{1,2}$  stabil asimtotik saat  $m > 0.5139$

Maka  $E_{1,2}$  stabil asimtotik saat  $m > 0.5139$  karena syarat-syarat terpenuhi seperti yang sudah dijelaskan pada subbab sebelumnya tentang kriteria kestabilan Routh-Hurwitz.

Dengan ini dapat diketahui bahwa sistem akan bersifat stabil asimtotik pada saat titik tetap  $E_0$  dengan syarat nilai dari parameter  $b > 0.7068$  dan  $m = 0.005$ . Saat titik tetap  $E_{1,2}$  akan bersifat stabil asimtotik dengan syarat nilai parameter dari  $m > 0.5139$  dan  $b = 0.2$ . Dengan memasukkan nilai parameter seperti pada [6] . misalkan  $= 0.9$ ,  $c = 1.5$ ,  $d = 0.2$ ,  $k = 0.05$ ,  $b = b_0 = 0.7068$  dan  $m = 0.005$  menggunakan perhitungan numerik diperoleh nilai eigen

1. Pada titik tetap  $E_0 \left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right) = E_0 \left(0, \frac{1}{0.7068}, 0, 0\right)$

$$\lambda_1 = -0.7068$$

$$\lambda_{2,3} = \pm 0.5309i$$

$$\lambda_4 = -1.0351$$

2. Pada titik tetap  $E_{1,2}(\pm x_0, y_0, \mp z_0, \mp u_0)$

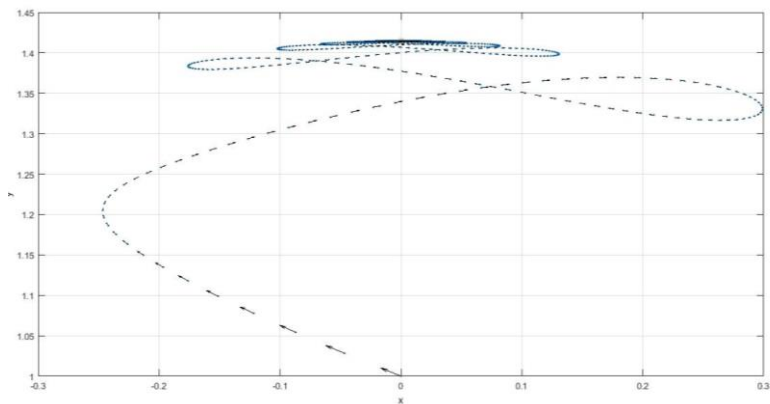
$$\lambda_1 = 0.0557$$

$$\lambda_{2,3} = -1.3722 \pm 2.5857i$$

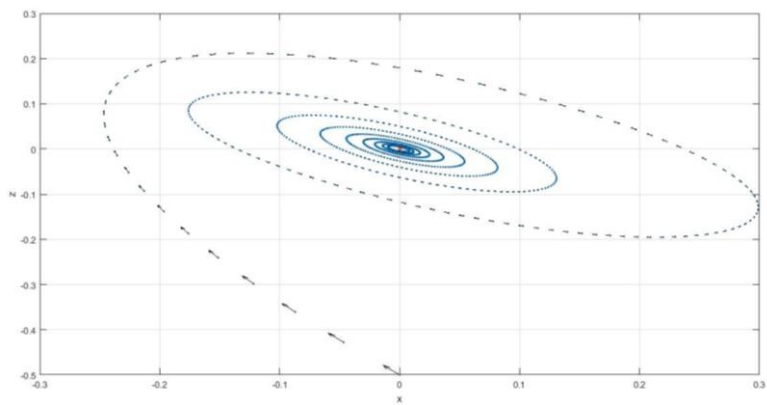
$$\lambda_4 = -1.4849$$

Dari perhitungan numerik diatas, diketahui bahwa bifurkasi Hopf terjadi pada titik tetap  $E_0$  karena terdapat nilai eigen yang mempunyai sepasang bilangan imajiner dengan nilai eigen lainnya bernilai negatif. Selanjutnya akan diselidiki eksistensi bifurkasi Hopf menggunakan simulasi numerik.

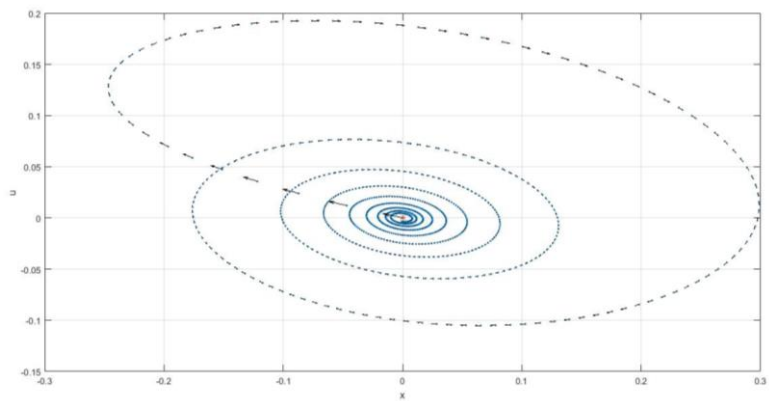




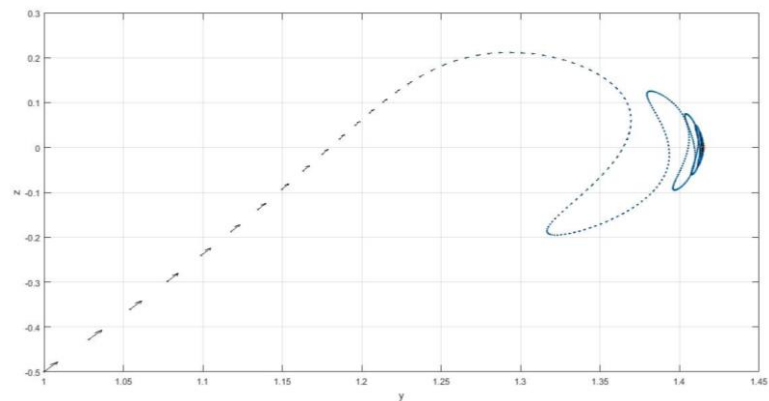
*Gambar 4. 1 Trayektori orbit periodik 2D(x, y)*



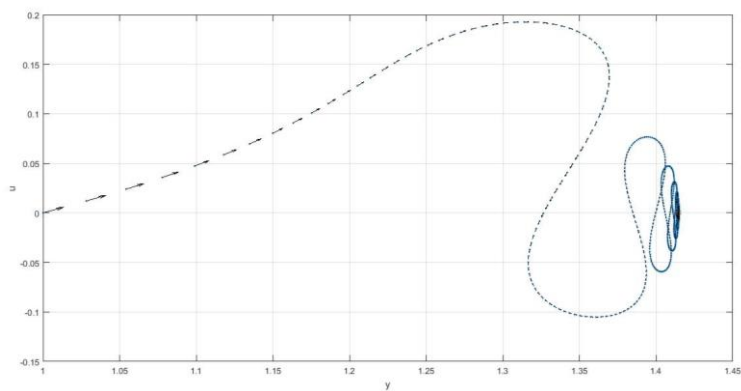
*Gambar 4. 2 Trayektori orbit periodik 2D(x, z)*



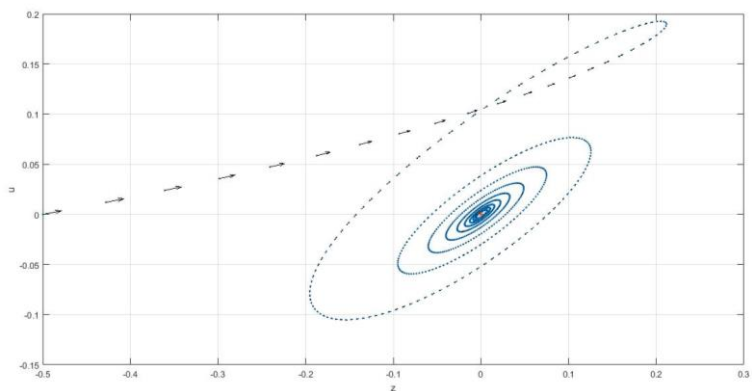
Gambar 4. 3 Trayektori orbit periodik  $2D(x, u)$



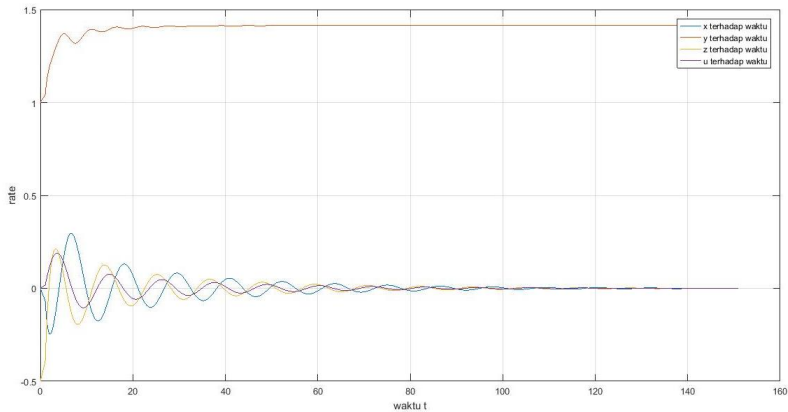
Gambar 4. 4 Trayektori orbit periodik  $2D(y, z)$



*Gambar 4. 5 Trayektori orbit periodik 2D(y, u)*



*Gambar 4. 6 Trayektori orbit periodik 2D(z, u)*



*Gambar 4. 7 Grafik kestabilan  $(x,y,z,u)$  terhadap fungsi  $t$ (waktu) pada  $b = 0.7068$*

Berdasarkan hasil simulasi pada Gambar 4.1 sampai dengan Gambar 4.7, terlihat adanya orbit periodik dengan arah menuju ke limit cycle pada nilai  $b = 0.7068$ , sehingga dapat disimpulkan bifurkasi Hopf adalah bifurkasi Hopf Superkritikal.

#### 4.5 Simulasi Numerik

Pada subbab ini, dibahas bagaimana cara untuk memperoleh solusi numerik dari model sistem keuangan dan simulasi numeriknya. Hal ini bertujuan untuk memdahkan dalam menganalisis model, serta interpretasi dari hasil analisis yang sudah dilakukan. Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde 4. Metode Runge-Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan tutunan-turunan tingkat tinggi. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan  $h^4$ , dengan  $h$  merupakan langkah waktu (*step size*).

Perhatikan kembali sistem (4.1). Misalkan

$$\begin{aligned}
f_1(t, x, y, z, u) &= \dot{x} = z + (y - a)x \\
f_2(t, x, y, z, u) &= \dot{y} = 1 - by - x^2 \\
f_3(t, x, y, z, u) &= \dot{z} = -x - cz + u \\
f_4(t, x, y, z, u) &= \dot{u} = -dxy - ku - mz
\end{aligned} \tag{4.13}$$

dan misalkan nilai awal untuk (4.13) adalah

$$\begin{aligned}
x(t_0) &= x_0 \\
y(t_0) &= y_0 \\
z(t_0) &= z_0 \\
u(t_0) &= u_0
\end{aligned}$$

maka diperoleh integrasi numerik dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde-4 sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
x_{j+1} &= x_j + \frac{1}{6}(k_{1,x} + 2k_{2,x} + 2k_{3,x} + k_{4,x}) \\
y_{j+1} &= y_j + \frac{1}{6}(k_{1,y} + 2k_{2,y} + 2k_{3,y} + k_{4,y}) \\
z_{j+1} &= z_j + \frac{1}{6}(k_{1,z} + 2k_{2,z} + 2k_{3,z} + k_{4,z}) \\
u_{j+1} &= u_j + \frac{1}{6}(k_{1,u} + 2k_{2,u} + 2k_{3,u} + k_{4,u})
\end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
k_{1,x} &= hf_1(t_j, x_j, y_j, z_j, u_j) \\
&= h(z_j + (y_j - a)x_j) \\
k_{1,y} &= hf_2(t_j, x_j, y_j, z_j, u_j) \\
&= h(1 - by_j - x_j^2) \\
k_{1,z} &= hf_3(t_j, x_j, y_j, z_j, u_j) \\
&= h(-x_j - cz_j + u_j) \\
k_{1,u} &= hf_4(t_j, x_j, y_j, z_j, u_j) \\
&= h(-dx_jy_j - ku_j - mz_j)
\end{aligned}$$

$$k_{2,x} = hf_1\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}, z_j + \frac{k_{1,z}}{2}, u_j + \frac{k_{1,u}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= h \left( \left( z_j + \frac{k_{1,z}}{2} \right) + \left( \left( y_j + \frac{k_{1,y}}{2} \right) - a \right) \left( x_j + \frac{k_{1,x}}{2} \right) \right) \\
k_{2,y} &= hf_2 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}, z_j + \frac{k_{1,z}}{2}, u_j + \frac{k_{1,u}}{2} \right) \\
&= h \left( 1 - b \left( y_j + \frac{k_{1,y}}{2} \right) - \left( x_j + \frac{k_{1,x}}{2} \right)^2 \right) \\
k_{2,z} &= hf_3 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}, z_j + \frac{k_{1,z}}{2}, u_j + \frac{k_{1,u}}{2} \right) \\
&= h \left( - \left( x_j + \frac{k_{1,x}}{2} \right) - c \left( z_j + \frac{k_{1,z}}{2} \right) + \left( u_j + \frac{k_{1,u}}{2} \right) \right) \\
k_{2,u} &= hf_2 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{1,x}}{2}, y_j + \frac{k_{1,y}}{2}, z_j + \frac{k_{1,z}}{2}, u_j + \frac{k_{1,u}}{2} \right) \\
&= h \left( -d \left( x_j + \frac{k_{1,x}}{2} \right) \left( y_j + \frac{k_{1,y}}{2} \right) - k \left( u_j + \frac{k_{1,u}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - m \left( z_j + \frac{k_{1,z}}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,x} &= hf_1 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}, z_j + \frac{k_{2,z}}{2}, u_j + \frac{k_{2,u}}{2} \right) \\
&= h \left( \left( z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) + \left( \left( y_j + \frac{k_{2,y}}{2} \right) - a \right) \left( x_j + \frac{k_{2,x}}{2} \right) \right) \\
k_{3,y} &= hf_2 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}, z_j + \frac{k_{2,z}}{2}, u_j + \frac{k_{2,u}}{2} \right) \\
&= h \left( 1 - b \left( y_j + \frac{k_{2,y}}{2} \right) - \left( x_j + \frac{k_{2,x}}{2} \right)^2 \right) \\
k_{3,z} &= hf_3 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}, z_j + \frac{k_{2,z}}{2}, u_j + \frac{k_{2,u}}{2} \right)
\end{aligned}$$

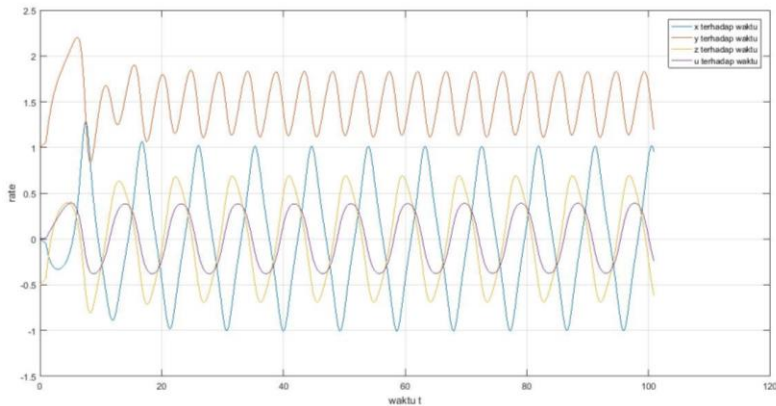
$$\begin{aligned}
k_{3,z} &= h \left( - \left( x_j + \frac{k_{2,x}}{2} \right) - c \left( z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) + \left( u_j + \frac{k_{2,u}}{2} \right) \right) \\
k_{3,u} &= hf_3 \left( t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{k_{2,x}}{2}, y_j + \frac{k_{2,y}}{2}, z_j + \frac{k_{2,z}}{2}, u_j + \frac{k_{2,u}}{2} \right) \\
k_{3,u} &= h \left( -d \left( x_j + \frac{k_{2,x}}{2} \right) \left( y_j + \frac{k_{2,y}}{2} \right) - k \left( u_j + \frac{k_{2,u}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. - m \left( z_j + \frac{k_{2,z}}{2} \right) \right) \\
k_{4,x} &= hf_1(t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y}, z_j + k_{3,z} + u + k_{3,u}) \\
&= h \left( (z_j + k_{3,z}) + ((y_j + k_{3,y}) - a)(x_j + k_{3,x}) \right) \\
k_{4,y} &= hf_2(t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y}, z_j + k_{3,z} + u + k_{3,u}) \\
&= h \left( 1 - b(y_j + k_{3,y}) - (x_j + k_{3,x})^2 \right) \\
k_{4,z} &= hf_3(t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y}, z_j + k_{3,z} + u + k_{3,u}) \\
&= h \left( -(x_j + k_{3,x}) - c(z_j + k_{3,z}) + (u + k_{3,u}) \right) \\
k_{4,u} &= hf_3(t_j + h, x_j + k_{3,x}, y_j + k_{3,y}, z_j + k_{3,z} + u + k_{3,u}) \\
&= h \left( -d(x_j + k_{3,x})(y_j + k_{3,y}) - k(u + k_{3,u}) \right. \\
&\quad \left. - m(uz_j + k_{3,z}) \right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan program MATLAB diselidiki hubungan antara biaya per investasi ( $b$ ) dengan kestabilan titik tetap sehingga diperoleh

### **1. Analisis kestabilan titik tetap ketika biaya per investasi $b < 0.7068$**

Simulasi menggunakan parameter seperti pada [6]. Misalkan Misalkan  $a = 0.9, c = 1.5, d = 0.2, k = 0.05$  dan  $m = 0.005$  agar system bersifat stabil maka nilai  $b < 0.7068$ . Ambil nilai  $b = 0.4$

dengan kondisi awal seperti pada [6]  $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, -0.5, 0)$ , diperoleh



*Gambar 4. 8 Grafik Kestabilan  $(x,y,z,u)$  terhadap fungsi  $t(\text{waktu})$  pada saat  $b = 0.4$*

#### Laju Perubahan Suku Bunga ( $x$ )

Berdasarkan Gambar 4.8, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk suku bunga dengan nilai awal sebesar 0 berosilasi seiring bertambahnya waktu jauh dari titik 0.

#### Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi ( $y$ )

Berdasarkan Gambar 4.8, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal 1 berosilasi seiring bertambahnya waktu jauh dari titik 1.

#### Laju Perubahan Indeks Harga Instrumen Keuangan ( $z$ )

Berdasarkan Gambar 4.8, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar  $-0.5$  berosilasi seiring bertambahnya waktu jauh dari titik  $-0.5$ .

#### Laju Perubahan Control Input

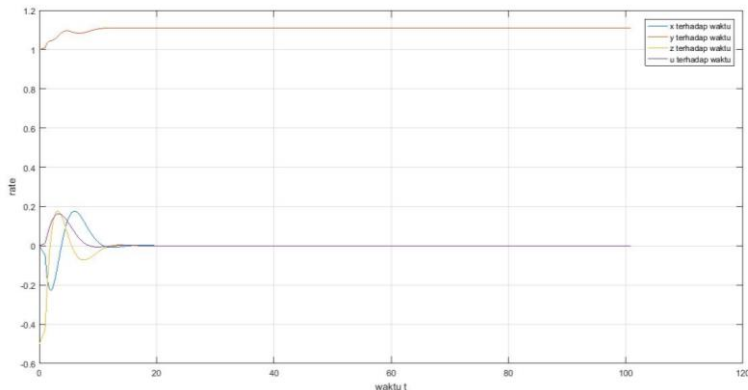
Berdasarkan Gambar 4.8, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk control input dengan nilai awal 0 berosilasi seiring bertambahnya waktu jauh dari titik 0.



Intepretasi dari hasil analisis dan hasil simulasi Pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa fenomena yang terjadi pada sistem keuangan real memenuhi kondisi dimana suku bunga akan naik turun tidak terkendali seiring bertambahnya waktu. Hal tersebut berdampak pada naik turunnya harga instrumen keuangan sehingga indeks harga intrumen juga ikut naik turun. Tingkat permintaan investasi naik turun karena para pelaku akan mengikuti kondisi yang ada dan control input juga tidak terlaksana secara maksimal akibatnya pemerintah juga kesulitan untuk mengontrol. Akibatnya, total kegiatan produksi tidak mencukupi untuk total konsumsi di masyarakat. pada kondisi ini, sistem keuangan tidak stabil.

## 2. Analisis kestabilan titik tetap ketika biaya per investasi $b > 0.7068$

Simulasi menggunakan parameter seperti pada [6]. Misalkan Misalkan  $a = 0.9, c = 1.5, d = 0.2, k = 0.05$  dan  $m = 0.005$  agar system bersifat stabil maka nilai  $b > 0.7068$ . Ambil nilai  $b = 0.9$  dengan kondisi awal seperti pada [6]  $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, -0.5, 0)$ , diperoleh



Gambar 4. 9 Grafik Kestabilan  $(x,y,z,u)$  terhadap fungsi  $t(\text{waktu})$  pada saat  $b = 0.9$

*Laju Perubahan Suku Bunga ( $x$ )*

Berdasarkan Gambar 4.9, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk suku bunga dengan nilai awal sebesar 0 beresilasi bergerak naik kemudian bergerak didekat titik 0 dan konstan di titik 0 seiring bertambahnya waktu.

*Laju Perubahan Tingkat Permintaan Investasi ( $y$ )*

Berdasarkan Gambar 4.9, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk tingkat permintaan investasi dengan nilai awal 1 bergerak naik mendekati titik 1,11 kemudian konstan seiring bertambahnya waktu.

*Laju Perubahan Indeks Harga Instrumen Keuangan ( $z$ )*

Berdasarkan Gambar 4.9, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk indeks harga instrumen keuangan dengan nilai awal sebesar  $-0.5$  bergerak naik dan setelah itu beresilasi mendekati titik 0 kemudian konstan di titik 0 seiring bertambahnya waktu.

*Laju Perubahan Control Input ( $u$ )*

Berdasarkan Gambar 4.9, dapat diketahui bahwa penyelesaian untuk control input dengan nilai awal 0 bergerak naik turun dan beresilasi mendekati titik 0, kemudian konstan di 0 seiring bertambahnya waktu.

Interpretasi dari hasil analisis dan hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika fenomena yang terjadi pada sistem keuangan memenuhi kondisi ini, maka sistem keuangan akan stabil dengan penambahan kontrol input yaitu dari pemerintah memberikan kebijakan yang mana kebijakan tersebut berpengaruh langsung terhadap tinggi rendahnya indeks harga instrumen keuangan, dengan mengontrol biaya per investasi maka suku bunga menjadi turun namun akan naik kembali dan konstan kembali di angka yang seharusnya dengan seiring bertambahnya waktu, tingkat permintaan investasi dan indeks harga instrumen meningkat dengan seiring berjalannya waktu menjadi konstan di angka yang seharusnya. Kondisi ini memberikan gambaran dimana sistem keuangan berjalan dengan baik dan perekonomian berjalan lancar karena adanya kebijakan pemerintah yang mana mengontrol biaya

per investasi agar tinggi rendahnya suku bunga, tingkat permintaan investasi dan juga indeks harga instrumen keuangan yang sesuai pada kondisi ini menyebabkan total kegiatan produksi tetap mencukupi untuk total konsumsi di masyarakat.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB V PENUTUP

Pada bab ini, diberikan kesimpulan sebagai hasil dari analisis model yang telah diperoleh dan saran sebagai pertimbangan dalam pengembangan atau penelitian lebih lanjut.

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa

1. Pada model sistem keuangan dengan empat variable diperoleh 3 titik tetap

- Ketika  $y_0 = \frac{1}{b}$  maka diperoleh titik tetap  $E_0 \left(0, \frac{1}{b}, 0, 0\right)$
- dan ketika  $y_0 = \frac{-(k+ack+am)}{d-ck-m}$  dengan syarat  $d - ck - m \neq 0$  dan dapat kita misalkan  $\Gamma_1 = d - ck - m$  dan  $\Gamma_2 = -(k + ack + am)$  dengan  $0 < \Gamma_1 < b\Gamma_2$  maka didapat titik tetap  $E_{1,2}(\pm x_0, y_0, \mp z_0, \mp u_0)$  dimana

$$x_0 = \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

$$y_0 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$$

$$z_0 = (ad + k) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}}$$

$$u_0 = (d + acd - m) \frac{\Gamma_1 - b\Gamma_2}{\Gamma_1^{\frac{3}{2}}}$$

- $E_*$  adalah titik tetap yang didalamnya ada titik tetap  $E_0$  dan  $E_{1,2}$

2. Kestabilan pada titik tetap  $E_*(x_*, y_*, z_*, u_*)$  berlaku saat  $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$ ,  $h_1 h_2 - h_3 > 0$  dan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 > 0$ . Nilai-nilai tersebut diperoleh menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Bifurkasi Hopf juga dapat terjadi pada titik tetap ini jika  $h_0 > 0$ ,  $h_1, h_2, h_3, h_4 > 0$ ,  $h_1 h_2 - h_3 > 0$  dan  $h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4 = 0$  berlaku sedemikian hingga

$$\frac{d}{db}(h_1 h_2 h_3 - h_3^2 - h_1^2 h_4) \neq 0$$

3. Bifurkasi Hopf terjadi pada titik tetap  $E_0$  dimana ketika biaya per investasi  $b = b_0 = 0.7068$  sistem masuk kedalam bifurkasi Hopf mengelilingi titik tetap positif.
4. Dengan metode Numerik Runge-Kutta orde-4 menggunakan *software* MATLAB, diperoleh penyelesaian numerik dari sistem keuangan memberikan hasil yang sama dengan hasil analisis untuk kestabilan titik tetap.

## 5.2 Saran

Perlu dikembangkan analisis dari model sistem keuangan yang berkaitan keterkontrolan dengan mengoptimalkan dan membentuk fungsi obyektif yang lebih mendalam tentang penerapannya dalam perekonomian makro.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] IMF. (2004). **“Compilation Guide on Financial Soundness Indicators”**. IMF, Washington DC, para. 2.2.
- [2] Ding, Y., Weihua J., & Hongbin W. (2012). “Hopf-Pitchfork Bifurcation and Periodic Phenomena in Nonlinear Financial System with Delay”. **Chaos, Solitons and Fractals Vol. 45**, Hal. 1048-1057.
- [3] Ma, J., Chen Y. (2001). “Study for The Global Complicated Character of A Kind of Non-Linear Finance System. I”. **Applied Mathematics and Mechanics Vol. 22**, No. 11, Hal. 1240-1251.
- [4] X,-D, Zhang., X, -D, Liu., Y, Zheng., and C, Liu. (2013). “Chaotic Dynamic Behavior Analysis and Control For A Financial Risk System”. **Chinese Physic B Vol. 22**, No. 3, Article ID 030509.
- [5] J, A, Holyst., K, Urbanowicz. (2000). “Chaos Control In Economical Model by Time-Delayed Feedback Method”. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications Vol. 287**, No. 3-4, Hal. 587-589.
- [6] G, Kai., W, Zhang., Z, C, Wei., J, F, Wang., and A, Akgul. (2017). “Hopf Bifurcation, Positively Invariant Set, and Physical Realization of a New Four-Dimensional Hyperchaotic Financial System”. **Mathematical Problem in Engineering**. Article ID 2490580.
- [7] Perko, L. (2000). **“Differential Equations and Dynamical System”**. New York : Springer-Verlag.

- [8] Wiggins,Stephen.(2003). **“Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos-Second Edition”**. New York : Springer-Verlag New York, Inc.
- [9] Strogartz, Steven H.(1994). **“Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering”**. USA : Perseus Books Publishing, L.L.C.
- [10] M, Prakash., P, Balasubramaniam. (2016). “Stability and Hopf Bifurcations Analysis of Novel Hyperchaotic System with Delayed Feedback Control”. **Complexity Vol. 21**, No. 6, Hal. 180-193.
- [11] Subiono.(2013). “Sistem Linear dan Kontrol Optimal”.Surabaya : Jurusan Matematika ITS Surabaya.
- [12] Liu,W. (1994). **“Criterion of Hopf Bifurcation without Using Eigen Values”**. Indiana.



## BIODATA PENULIS



Penulis bernama Anggita Dwi Saputri, lahir di Surabaya, 8 Januari 1996. Penulis merupakan anak bungsu dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Chosirin dan Ibu Sak'amah. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari SDN SAMBIKEREP II/480 Surabaya (2002-2008), SMPN 3 Surabaya (2008-2011), SMAN 6 Surabaya (2011-2014). Setelah lulus dari SMAN 6 Surabaya, penulis melanjutkan studi ke jenjang S1 di Departemen Matematika ITS pada tahun 2014 melalui jalur SNMPTN dengan NRP 06111440000028. Di Departemen Matematika ITS penulis mengambil Bidang Minat Matematika Terapan. Selain aktif kuliah, penulis juga aktif berorganisasi di Himpunan Mahasiswa sebagai Staff SRD HIMATIKA ITS (2015/2016), WAKIL KETUA HIMATIKA ITS (2016/2017) dan aktif di dunia kepananduan di ITS sebagai Pemandu LKMM, serta mengikuti beberapa kepanitian yang ada di dalam kampus dan diluar kampus. Selain itu penulis juga melaksanakan Kerja Praktek di Bank Indonesia pada tahun 2017.

Apabila ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi mengenai Tugas Akhir ini, bisa disampaikan kepada penulis melalui email [anggitadwi81@gmail.com](mailto:anggitadwi81@gmail.com).